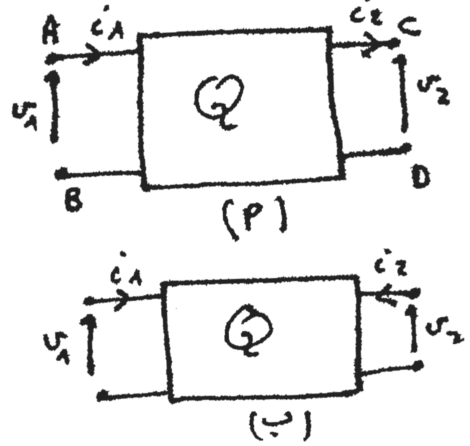
رباعيات الأقطاب

ب - 1 : تعريف :



الشكل (ه١ - ١)

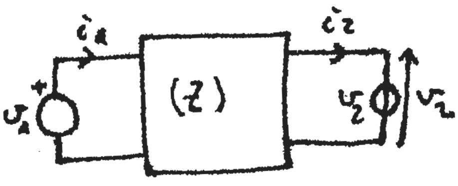
يمكن تمثيل رباعي الأقطاب بصندوق مغلق يحتوي على دائرة كهربائية تتعامل مع الخارج بأربعة أقطاب، إثنان للمدخل وإثنان للمخرج.

كما أن رباعي القطب الذي يحتوي على مصادر طاقة تعرف برباعي القطب النشيط أما الذي لا يحتوي على مصادر طاقة فيعرف برباعي القطب الخامل.

والشكل (ه١ - ١) يبين الشكل التخطيطي لرباعي القطب.

ب - 2 : التمثيل المصفوفاتي لرباعي القطب :

ب - 2 - أ : مصفوفة المعاوقة (Z) :



الشكل (ه١ - 2)

يفضل إستخدامها في حالة التوصيل على التوالي، لتكن (Z) لرباعي القطب الموضح في الشكل (ه١ - 2) هي كما يلي:

$$(Z) = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$$

وتكون قانون أوم في هذه الحالة

$$(v) = (Z)(i) \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

ومنه:

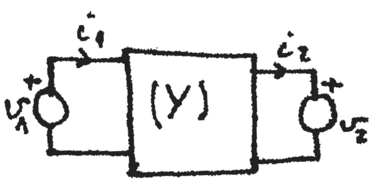
$$v_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2$$
$$v_2 = Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2$$

وبالتالي يمكننا تعريف كل عناصر المصفوفة كما يلي:

- $Z_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{i_2=0}$ وهي معاوقة الدخول عندما تكون الدائرة مفتوحة عند المخرج.
- $Z_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{i_1=0}$ وهي معاوقة الخروج عندما تكون الدائرة مفتوحة عند المدخل.
- $Z_{12} = \left.\frac{v_1}{i_2}\right|_{i_1=0}$ وهي المعاوقة الإنتقالية للدخل عندما تكون دارة المدخل مفتوحة.
- $Z_{21} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{i_2=0}$ وهي المعاوقة الإنتقالية للخرج عندما تكون دارة المخرج مفتوحة.

ملاحظة : $Z_{12} = Z_{21}$ هي خاصية أساسية لرباعي القطب الخامل.

ب - 2 - ب : مصفوفة الإمرار :



الشكل (ه١ - 3)

يفضل إستخدامها في حالة التوصيل على التوازي، ولتكن (Y) لرباعي القطب الموضح في الشكل (ه١ - 3) هي:

$$(Y) = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$$

وتكون قانون أوم في هذه الحالة :

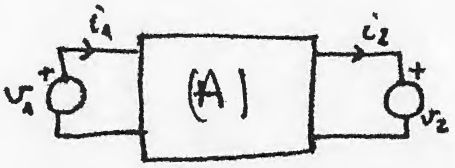
$$(i) = (Y)(v)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = Y_{11} v_1 + Y_{12} v_2 \\ i_2 = Y_{21} v_1 + Y_{22} v_2 \end{cases}$$

وبالتالي تمكننا تعريف كل عناصر المصفوفة (Y) كما يلي :

- $Y_{11} = \frac{i_1}{v_1}\Big|_{v_2=0}$ وهي إمرار الدخول لما تكون الدائرة مفتوحة عند المخرج .
- $Y_{22} = \frac{i_2}{v_2}\Big|_{v_1=0}$ وهي إمرار المزدوج لما تكون الدائرة مفتوحة عند المدخل .
- $Y_{12} = \frac{i_1}{v_2}\Big|_{v_1=0}$ الإمرار الإنتقالي للدخل عند قصر المدخل (
- $Y_{21} = \frac{i_2}{v_1}\Big|_{v_2=0}$ الإمرار الإنتقالي للمخرج عند قصر المدخل .

4 - 2 - د : مصفوفة التكبير (A) :



الشكل (4-10)

تفضل إستخدامها في حالة التوصيل على التتابع ولنعطي (A) لرباعي القطب الموضح في الشكل (4-10) هي :

$$(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

وبتطبيق قانون أوم نجد :

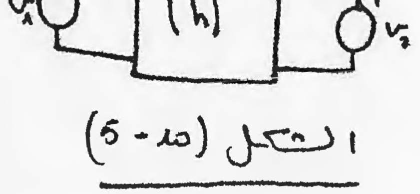
$$\begin{pmatrix} i_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} v_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_2 = A_{11} i_1 + A_{12} v_1 \\ v_2 = A_{21} i_1 + A_{22} v_1 \end{cases}$$

وبالتالي تمكن تعريف عناصر المصفوفة (A) كالتالي :

- $A_{11} = \frac{i_2}{i_1}\Big|_{v_1=0}$ وهو عبارة عن تكبير التيار عند قصر المدخل .
- $A_{12} = \frac{i_2}{v_1}\Big|_{i_1=0}$ الإمرار الإنتقالي للمخرج عند فتح دائرة المدخل .
- $A_{21} = \frac{v_2}{i_1}\Big|_{v_1=0}$ المعاوقة الإنتقالية للمخرج عند قصر المدخل .
- $A_{22} = \frac{v_2}{v_1}\Big|_{i_1=0}$ تكبير الجهد عند فتح دائرة المدخل .

4 - 2 - ه : المصفوفة الهجين (h) :



الشكل (5-10)

تستخدم هذه المصفوفة غالبا لدوائر الترانزستور وتكون (h) للدارة الموضحة في الشكل (5-10) كما يلي :

$$(h) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

وبتطبيق قانون أوم نجد .

$$\begin{cases} v_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \\ i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \end{cases} \Longleftarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} v_2$$

وبالتالي تمكن تعريف عناصر المصفوفة (h) كالتالي :

- $h_{11} = \frac{v_1}{i_1}\Big|_{v_2=0}$ معاوقة الدخول عند قصر المخرج .

- $h_{22}=\frac{i_2}{v_2}\Big|_{i_1=0}$: إمرار المزدوج عند فتح دارة المدخل.
- $h_{12}=\frac{v_1}{v_2}\Big|_{i_1=0}$ التكبير الخلفي للجهد عند فتح دارة المدخل.
- $h_{21}=\frac{i_2}{i_1}\Big|_{v_2=0}$ التكبير الأمامي للتيار عند قصر دارة المخرج.

د - 2 - هـ: المصفوفة الهجين العكسية:

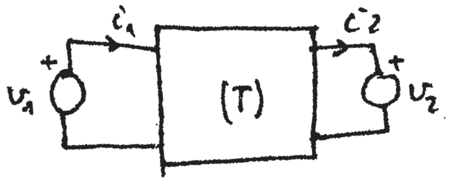
تعرف هذه المصفوفة بالعلاقتين التاليتين:

$$i_1 = g_{11} v_1 + g_{12} i_2$$

$$v_2 = g_{21} v_1 + g_{22} i_2$$

وبنفس الطريقة السابقة تمكن إيجاد عناصر المصفوفة (G) وهي g_{11} و g_{21} و g_{12} و g_{22} وتمكن تعريفها.

د - 2 - و: مصفوفة التحويل (T)



الشكل (د - 6)

تعرف هذه المصفوفة بالعلاقتين التاليتين:

$$v_1 = T_{11} v_2 + T_{12} i_2$$

$$i_1 = T_{21} v_2 + T_{22} i_2$$

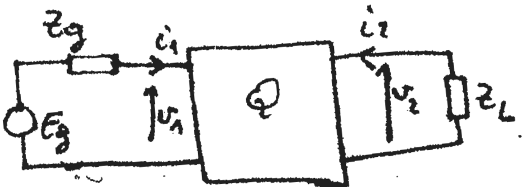
وتمكن أيضا بنفس الطريقة السابقة إيجاد: T_{11} و T_{12} و T_{21} و T_{22} وتعريفها.

ملاحظة: عند رباعيات الأقطاب الخاملة تكون العلاقات (المساواة) التالية محققة:

$Z_{12}=Z_{21}$ و $Y_{12}=Y_{21}$ و $h_{12}=h_{21}$ و $g_{12}=g_{21}$.

د - 3: تركيبة رباعي قطب:

د - 3 - أ: تركيبة رباعي القطب الممثل بـ [Z]:



الشكل (د - 7)

لتكن التركيبة الموضحة في الشكل (د - 7)
حيث رباعي القطب Q معرف بالعلاقة:

$$v_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2 \longrightarrow (1)$$

$$v_2 = Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2 \longrightarrow (2)$$

ومن الشكل نجد:

$$v_1 = E_g - Z_g i_1 \longrightarrow (3)$$

$$v_2 = -Z_L i_2 \longrightarrow (4)$$

* ممانعة الدخول $\left(Z_e = \frac{v_1}{i_1}\right)$

من المعادلتين (4) و (2) نجد:

$$v_2 = -Z_L i_2 = Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2 \Rightarrow i_2 = -\frac{Z_{21} i_1}{Z_L + Z_{22}} \longrightarrow (5)$$

وبتعويض (5) في (1) نجد:

$$v_1 = Z_{11} i_1 - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_L + Z_{22}} i_1 = \frac{[Z_{11} Z_L + (\overbrace{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}}^{\Delta})]}{Z_L + Z_{22}} i_1$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{Z_{11} Z_L + \Delta Z}{Z_L + Z_{22}} i_1 \Longrightarrow \boxed{Z_e = \frac{v_1}{i_1} = \frac{Z_{11} Z_L + \Delta Z}{Z_L + Z_{22}}}$$

* معاوقة الخروج ($Z_s = \frac{v_2}{i_2}\Big|_{Eg=0}$)

من تعريف هذه المقاومة نجد:

$$Eg = 0 \Rightarrow v_1 = -Z_g i_1 \rightarrow ⑥ \Rightarrow -Z_g i_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2$$

إذن:

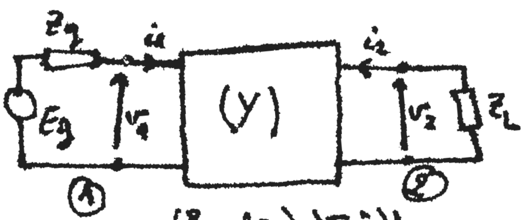
$$i_1 = -\frac{Z_{12}}{Z_g + Z_{11}} i_2 \longrightarrow ⑦$$

وبالتعويض من ⑥ في ② نجد:

$$v_2 = -\frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_g + Z_{11}} i_2 + Z_{22} i_2$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_s = \frac{v_2}{i_2}\Big|_{Eg=0} = \frac{Z_{22} Z_g + \Delta Z}{Z_g + Z_{11}}}$$

10-3-ب: تركيبة رباعي القطب الممثل بالمصفوفة (Y)



الشكل (10-8)

بتطبيق قانون كيرشوف على العقدتين ① و ② الموضحتين في الشكل (10-8) نجد:

$$(i) = (Y)(v)$$

$$(v) = (Y)^{-1}(i)$$

حيث: $(Z) = (Y)^{-1}$

إذن:

$$\begin{cases} i_1 = Y_{11} v_1 + Y_{12} v_2 \longrightarrow ① \\ i_2 = Y_{21} v_1 + Y_{22} v_2 \longrightarrow ② \end{cases}$$

ومن الشكل لدينا:

$$\begin{cases} v_2 = -Z_L i_2 \longrightarrow ③ \\ v_1 = E_g - Z_g i_1 \longrightarrow ④ \end{cases}$$

* معاوقة الدخول (Z_e):

فبما أن تعريف Z_e هو:

$$Z_e = \frac{v_1}{i_1}\Big|_{v_2=0} \Rightarrow Y_e = \frac{1}{Z_e} = \frac{i_1}{v_1}\Big|_{v_2=0}$$

نعوض ③ في ② نجد:

$$-\frac{v_2}{Z_L} = Y_{21} v_1 + Y_{22} v_2 \Rightarrow \left(-\frac{1}{Z_L} - Y_{22}\right) v_2 = Y_{21} v_1 \Rightarrow v_2 = -\frac{Z_L Y_{21}}{1 + Z_L Y_{22}} v_1 \longrightarrow ⑤$$

بتعويض ⑤ في ① نجد:

$$i_1 = Y_{11} v_1 - \frac{Z_L Y_{21} Y_{12}}{1 + Z_L Y_{22}} v_1$$

$$i_1 = \frac{Y_{11} + Z_L Y_{11} Y_{22} - Z_L Y_{21} Y_{12}}{1 + Z_L Y_{22}} v_1$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_e = \frac{v_1}{i_1} = \frac{1 + Z_L Y_{22}}{Y_{11} + Z_L \Delta Y}} \Longrightarrow \boxed{Y_e = \frac{Y_{11} + Z_L \Delta Y}{1 + Z_L Y_{22}}}$$

** معاوقة الخروج وسماحية الخروج

دائما من تعريف معاوقة الخروج نجد:

$$z_s = \frac{v_2}{i_2}\Big|_{Eg=0} \Rightarrow \cancel{v_1}$$

وبما أن:

$$\Rightarrow v_1 = -z_g\, i_1 \longrightarrow 5'$$

بتعويض (5') في (1) نجد.

$$-\frac{v_1}{z_g} = y_{11} v_1 + y_{12} v_2 \Rightarrow -v_1\left(\frac{1 + z_g y_{11}}{z_g}\right) = y_{11} v_2$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{z_g y_{12}}{1 + z_g y_{11}} v_2 \longrightarrow 6$$

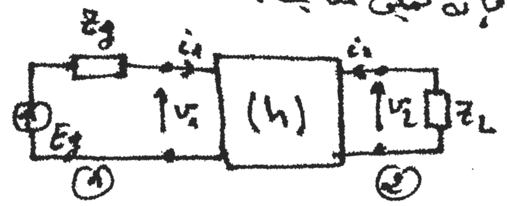
وبتعويض (6) في (2) نجد:

$$i_2 = \left(-\frac{z_g y_{12} y_{21}}{1 + z_g y_{11}} + y_{22}\right) v_2 = \frac{-z_g y_{12} y_{21} + z_g y_{11} y_{22} + y_{22}}{1 + z_g y_{11}} v_2$$

$$\Rightarrow \boxed{z_s = \frac{1 + z_g y_{11}}{y_{22} + z_g \Delta y}} \Rightarrow \boxed{y_s = \frac{y_{22} + z_g \Delta y}{1 + z_g y_{11}}}$$

10-3-د: تركيبة رباعي القطب الممثل بالمصفوفة (H):

لتكن التركيبة التالية الموضحة في الشكل (10-9) فإنه يمكن كتابة:



الشكل (10-9)

$$\begin{cases} v_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \longrightarrow 1 \\ i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \longrightarrow 2 \end{cases}$$

ومن العروتين (1) و(2) نكتب:

$$v_2 = -z_L\, i_2 \longrightarrow 3$$

$$v_1 = E_g - z_g\, i_1 \longrightarrow 4$$

* معاوقة الدخول:

بتعويض العلاقة (3) في (4) نجد:

$$-\frac{v_2}{z_L} = h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \qquad 2 \text{ و } 3$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{z_L} + h_{22}\right) v_2 = h_{21} i_1 \Rightarrow v_2 = -\frac{z_L h_{21}}{1 + z_L h_{22}} i_1 \longrightarrow 5$$

وبتعويض (5) في (1) نجد:

$$v_1 = h_{11} i_1 - \frac{z_L h_{21} h_{12}}{1 + z_L h_{22}} i_1 = \left(h_{11} - \frac{z_L h_{21} h_{12}}{1 + z_L h_{22}}\right) i_1$$

ومن تعريف معاوقة الدخول نجد:

$$\boxed{z_e = \frac{v_1}{i_1} = \frac{h_{11} + z_L \Delta H}{1 + z_L h_{22}}}$$

** معاوقة الخروج:

من تعريف هذه المعاوقة:

$$z_s = \frac{v_s}{i_s}\Big|_{Eg=0} \Rightarrow v_1 = -z_g\, i_1 \longrightarrow 6 \Rightarrow$$

وبتعويض (6) في (1).

$$-z_g i_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \Rightarrow i_1 = \frac{-h_{12}}{z_g + h_{11}} v_2 \longrightarrow 7$$

بالتعويض (1) في (2) نجد:

$$i_2 = \left(-\frac{h_{12}h_{21}}{Z_g + h_{11}} + h_{22}\right) v_2 \Rightarrow \boxed{Z_S = \frac{v_2}{i_2} = \frac{Z_g + h_{11}}{h_{22}Z_g + \Delta H}}$$

** تكبير الجهد A_v:

من تعريف التكبير:

$$A_v = \frac{v_2}{v_1}$$

لذلك نعوض (3) في (2) نجد:

$$-\frac{v_2}{Z_L} = h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \Rightarrow i_1 = -\frac{Z_L h_{22} + 1}{Z_L h_{21}} v_2$$

$$\Rightarrow v_1 = \left[-\frac{h_{11} + Z_L h_{11} h_{22}}{Z_L h_{21}} + h_{12}\right] v_2 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{Z_L h_{21}}{-h_{11} - Z_L h_{11} h_{22} + h_{12} h_{21} Z_L}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_v = -\frac{Z_L h_{21}}{h_{11} + Z_L \Delta H}}$$

*** تكبير التيار

نعوض (3) في (2) نجد:

$$i_2 = h_{21} i_1 - h_{22} Z_L i_2 \Rightarrow \boxed{A_i = \frac{i_2}{i_1} = \frac{h_{21}}{1 + Z_L h_{22}}}$$

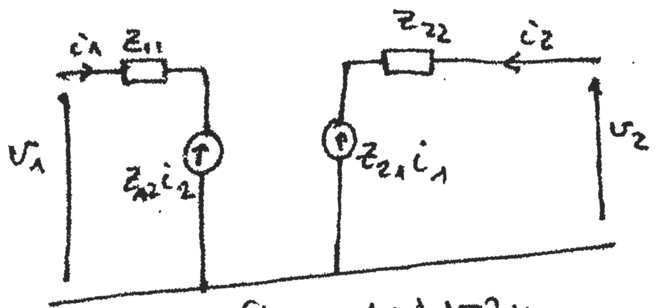
5-4: الدوائر المكافئة لرباعي القطب:

5-4-1: الدائرة المكافئة لرباعي القطب الممثل بالمصفوفة (Z):

بما أن معادلتي رباعي القطب هما:

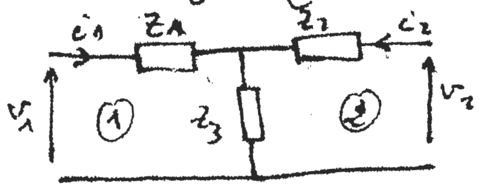
$$\begin{cases} v_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2 \\ v_2 = Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2 \end{cases}$$

فإن الدائرة المكافئة هي تلك الموضحة في الشكل (10 - 10)



الشكل (10 - 10)

ويمكن أيضا تمثيل رباعي القطب الممثل بالمصفوفة (Z) بدائرة على شكل (T) الموضحة في الشكل (10 - 11)



الشكل (10 - 11)

بتطبيق قانون كيرشوف على العروة (1) نجد:

$$\begin{cases} v_1 = (Z_1 + Z_3) i_1 + Z_3 i_2 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2 \\ v_2 = Z_3 i_1 + (Z_2 + Z_3) i_2 = Z_{22} i_1 + Z_{22} i_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} Z_{11} = Z_1 + Z_3 , & Z_{12} = Z_3 \\ Z_{21} = Z_3 & Z_{22} = Z_2 + Z_3 \end{pmatrix}$$

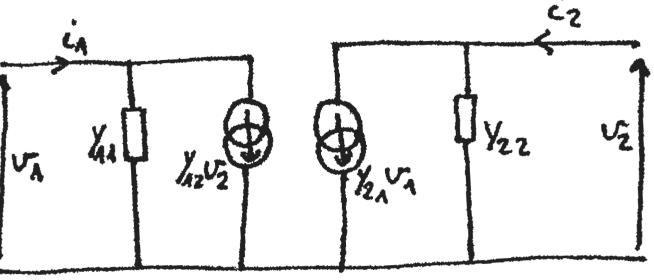
$$\Rightarrow Z_1 = Z_{11} - Z_{12} \quad , \quad Z_2 = Z_{22} - Z_{21} \quad , \quad Z_3 = Z_{12} = Z_{21}$$

5-4-ب : الدائرة المكافئة لرباعي القطب الممثل بالمصفوفة (Y) :

بما أن رباعي القطب الممثل بالمصفوفة (Y) تعطى معادلتيه بـ :

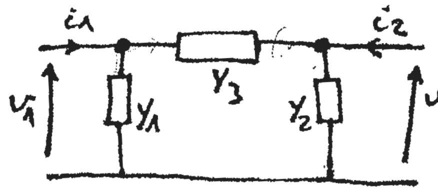
$$\begin{cases} i_1 = Y_{11} v_1 + Y_{12} v_2 \\ i_2 = Y_{21} v_1 + Y_{22} v_2 \end{cases}$$

فإن الحالة الدائرة المكافئة الأولى تكون على الشكل التالي أي الشكل (10 - 12)



الشكل (10 - 12)

ويمكن تمثيله مرة ثانية بدائرة على شكل π مثل ما هو موضح في الشكل (10 - 13)



الشكل (10 - 13)

$i_1 = v_1 Y_1 + (v_1 - v_2) Y_3$

$i_2 = v_2 Y_2 + (v_2 - v_1) Y_3$

من العقدة ① نجد :

$$i_1 = Y_1 v_1 + (v_1 - v_2) Y_3$$

ومن العقدة ② نجد:

$$i_2 = Y_2 v_2 + (v_2 - v_1) Y_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_1 = (Y_1 + Y_3) v_1 - Y_3 v_2 \\ i_2 = -Y_3 v_1 + (Y_2 + Y_3) v_2 \end{cases}$$

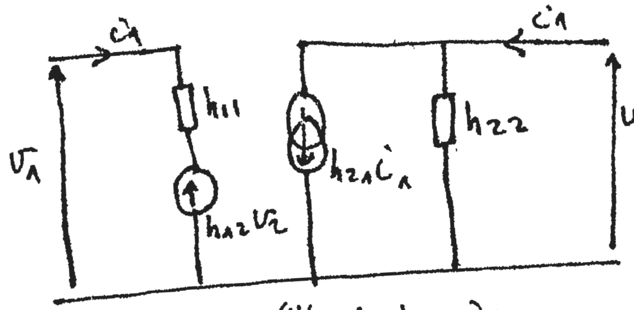
وبالمطابقة نجد :

$$\begin{pmatrix} Y_1 + Y_3 = Y_{11} & -Y_3 = Y_{12} \\ -Y_3 = Y_{21} & Y_2 + Y_3 = Y_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Y_1 = Y_{11} + Y_{12} \\ Y_2 + Y_3 = Y_{22} \\ \Rightarrow Y_2 = Y_{22} + Y_{21} \quad \text{و} \quad Y_3 = -Y_{12} = -Y_{21} \end{cases}$$

5-4-ج: الدائرة المكافئة لرباعي القطب الممثل بالمصفوفة (h)

نعطي الدائرة موضحة في الشكل (10 - 14)

ومن هذا الشكل نجد:



الشكل (10 - 14)

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= i_1 h_{11} + h_{12} v_2 \\ i_2 &= h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

5-5 - التحويل بين صور المصفوفات :

5-5-أ: إيجاد المصفوفة (h) إذا علمت المصفوفة (Z) :

إذا كان لدينا رباعي قطب ممثل بمصفوفة (Z) معلومة ومصفوفة (h) غير معلومة فإن:

$$\begin{cases} v_1 = z_{11} i_1 + z_{12} i_2 \rightarrow ① \\ v_2 = z_{21} i_1 + z_{22} i_2 \rightarrow ② \end{cases} \qquad ? \begin{cases} v_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \rightarrow ③ \\ i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \rightarrow ④ \end{cases}$$

ومن تعريف الوسائط ما نجد :

$$h_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{v_2=0} \Rightarrow \begin{aligned} ① &\Rightarrow v_1 = z_{11} i_1 + z_{12} i_2 \\ ② &\Rightarrow 0 = z_{21} i_1 + z_{22} i_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow i_2 = -\frac{z_{21}}{z_{22}} i_1 \Rightarrow v_1 = z_{11} i_1 - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{22}} i_1$$

$$\Rightarrow \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{v_2=0} = \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{22}}{z_{22}} = \frac{\Delta z}{z_{22}} \Rightarrow \boxed{h_{11} = \frac{\Delta z}{z_{22}}}$$

إيجاد h_{12}:

$$h_{12} = \left.\frac{v_1}{v_2}\right|_{i_1=0} \Rightarrow \left.\begin{matrix} v_1 = z_{12} i_2 \\ v_2 = z_{22} i_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow h_{12} = \left.\frac{v_1}{v_2}\right|_{i_1=0} = \frac{z_{12}}{z_{22}} \Rightarrow \boxed{h_{12} = \frac{z_{12}}{z_{22}}}$$

إيجاد h_{21}:

$$h_{21} = \left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{v_2=0}$$

$$v_2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} v_1 = z_{11} i_1 + z_{12} i_2 \\ 0 = z_{21} i_1 + z_{22} i_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow h_{21} = \left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{v_2=0} = -\frac{z_{21}}{z_{22}} \Rightarrow \boxed{h_{21} = -\frac{z_{21}}{z_{22}}}$$

إيجاد h_{22}:

$$h_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{i_1=0} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} v_1 = z_{12} i_2 \\ v_2 = z_{22} i_2 \end{matrix}\right. \Rightarrow \boxed{h_{22} = \frac{1}{z_{22}}}$$

D-5-ب: إيجاد المصفوفة (A) إذا علمت المصفوفة (Z):

نكتب المعادلات الوظيفية الخاصة بمصفوفتي (A) و (Z) كما يلي:

$$\left\{\begin{matrix} v_1 = z_{11} i_1 + z_{12} i_2 \rightarrow (1) \\ v_2 = z_{21} i_1 + z_{22} i_2 \rightarrow (2) \end{matrix}\right. \qquad \left\{\begin{matrix} i_2 = A_{11} i_1 + A_{12} v_1 \rightarrow (3) \\ v_2 = A_{21} i_1 + A_{22} v_1 \rightarrow (4) \end{matrix}\right.$$

ومن تعريف الوسائط A_{ij} نجد:

$$A_{11} = \left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{v_1=0}$$

ومن العلاقة (1) نجد:

$$0 = z_{11} i_1 + z_{12} i_2 \Rightarrow \frac{i_2}{i_1} = -\frac{z_{11}}{z_{12}} \Rightarrow \boxed{A_{11} = -\frac{z_{11}}{z_{12}}}$$

ولإيجاد A_{12}:

$$A_{12} = \left.\frac{i_2}{v_1}\right|_{i_1=0}$$

من العلاقة (1) أيضا:

$$v_1 = z_{12} i_2 \Rightarrow \frac{i_2}{v_1} = \frac{1}{z_{12}} \Rightarrow \boxed{A_{12} = \frac{1}{z_{12}}}$$

ولإيجاد A_{21}:

$$A_{21} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{v_1=0} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 0 = z_{11} i_1 + z_{12} i_2 \Rightarrow i_2 = -\frac{z_{11}}{z_{12}} i_1 \\ v_2 = z_{21} i_1 + z_{22} i_2 \end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow v_2 = \left(z_{21} - z_{22}\frac{z_{11}}{z_{12}}\right) i_1 \Rightarrow \frac{v_2}{i_1} = \frac{z_{21}z_{12} - z_{22}z_{11}}{z_{12}}$$

$$\Rightarrow A_{21} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{v_1=0} = -\frac{\Delta z}{z_{12}} \Rightarrow \boxed{A_{21} = -\frac{\Delta z}{z_{12}}}$$

ولإيجاد A_{22}:

$$A_{22} = \left.\frac{v_2}{v_1}\right|_{i_1=0} \Rightarrow \boxed{A_{22} = \frac{z_{22}}{z_{12}}}$$

5-6-5: إيجاد المصفوفة (Y) إذا علمت (Z):

المصفوفة (Y) توجد مباشرة كمقلوب (Z).

$$(Y) = (Z)^{-1} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} z_{22} & -z_{21} \\ -z_{12} & z_{11} \end{pmatrix}^{*}}{\Delta z} = \begin{pmatrix} \frac{z_{22}}{\Delta z} & -\frac{z_{12}}{\Delta z} \\ -\frac{z_{21}}{\Delta z} & \frac{z_{11}}{\Delta z} \end{pmatrix}$$

واجب: تحقق من هذا بالطريقة المباشرة.؟

وكخلاصة نضع النتائج في الجدول التالي:

	(Z)	(Y)	(h)	(A)	(T)
(Z)	$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{z_{22}}{\Delta z} & -\frac{z_{12}}{\Delta z} \\ -\frac{z_{21}}{\Delta z} & -\frac{z_{11}}{\Delta z} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\Delta z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ -\frac{z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\Delta z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ -\frac{z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{pmatrix}$	
(Y)	$\begin{pmatrix} \frac{y_{22}}{\Delta y} & -\frac{y_{12}}{\Delta y} \\ -\frac{y_{21}}{\Delta y} & \frac{y_{11}}{\Delta y} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} \frac{y_{22}}{y_{12}} & \frac{-\Delta y}{y_{12}} \\ \frac{1}{y_{12}} & \frac{-y_{11}}{y_{12}} \end{pmatrix}$	
(h)			$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$		
(A)	$\begin{pmatrix} -\frac{A_{11}}{A_{12}} & \frac{1}{A_{12}} \\ -\frac{\Delta A}{A_{12}} & \frac{A_{22}}{A_{12}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{A_{22}}{A_{21}} & \frac{1}{A_{21}} \\ -\frac{\Delta A}{A_{21}} & \frac{A_{11}}{A_{21}} \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$	
(T)					$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$

واجب: أكمل الجدول.

مثال: أوجد (Z) إذا أعطيت $Y = \begin{pmatrix} 1+j & -2j \\ -j & 2-j \end{pmatrix}$

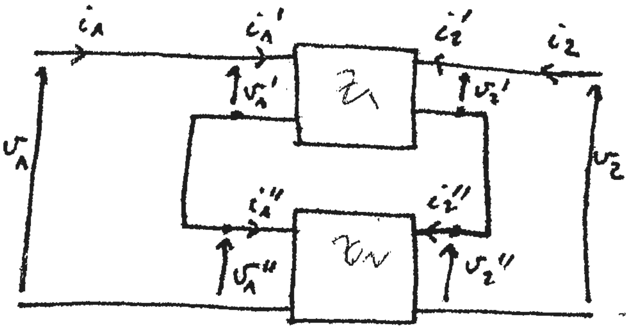
الحل:

$$(Z) = \begin{pmatrix} y_{22}/\Delta y & -y_{12}/\Delta y \\ -\frac{y_{21}}{\Delta y} & y_{11}/\Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{12} & y_{11} \end{pmatrix} \Big/ \Delta y$$

$$(Z) = \begin{pmatrix} 2-j & 2j \\ j & 1+j \end{pmatrix} \Big/ 5+j$$

10-6: الطرق المختلفة لتوصيل رباعيات الأقطاب :

10-6-أ: التوصيل على التوالي - التوالي :



الشكل (10 - 15)

يعبر عن كل رباعي قطب بمصفوفة المعاوقة الخاصة به وفي هذه الحالة نجد أن تياري المدخل متساويان ويساويان نظيريهما لرباعي القطب المكافئ. بينما جهد المدخل لرباعي القطب المكافئ يساوي مجموع جهدي المدخل لرباعيي القطب الأول والثاني، وكذلك الحال لجهد المخرج وهذا موضح في الشكل (10-15).

وتصبح لرباعي القطب المكافئ:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (Z_{eq}) \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

ومن التعريف نجد:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1' + v_1'' \\ v_2' + v_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1'' \\ v_2'' \end{pmatrix} = (Z_1) \begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \end{pmatrix} + Z_2 \begin{pmatrix} i_1'' \\ i_2'' \end{pmatrix}$$

$$= (Z_1) \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + (Z_2) \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \left[(Z_1) + (Z_2) \right] \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

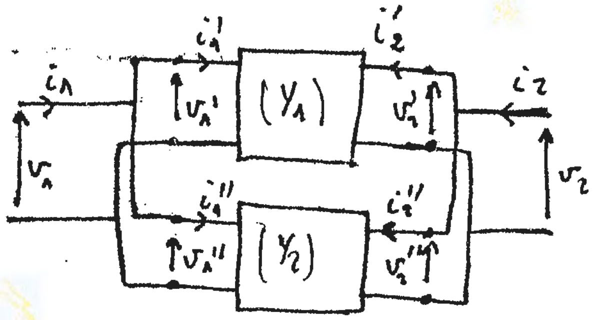
$$\therefore \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (Z_{eq}) \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

حيث:

$$\boxed{(Z_{eq}) = (Z_1) + (Z_2)}$$

وبالتالي تجمع المعاوقات في حالة التوصيل على التسلسل.

10-6-ب: التوصيل على التوازي - التوازي :



الشكل (10 - 16)

يعبر عن كل رباعي قطب بمصفوفة الإمرار (Y) الخاصة به وتكون جهد المدخل لرباعي القطب متساوي ويساوي جهد المدخل لرباعي القطب المكافئ، وكذلك الحال لجهد المخرج.

بينما تيار المدخل لرباعي القطب المكافئ يساوي مجموع تياري المدخلين لرباعيي القطب تحت الدراسة وكذلك الحال لتياري المخرج وذلك بتعريف التوصيل على التوازي - التوازي. وهذا موضح في الشكل (10-16)

وتصبح لرباعي القطب المكافئ:

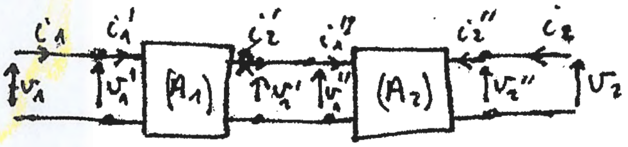
$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = (Y_{eq}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i_1' + i_1'' \\ i_2' + i_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_1'' \\ i_2'' \end{pmatrix} = (Y_1) \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} + (Y_2) \begin{pmatrix} v_1'' \\ v_2'' \end{pmatrix} = (Y_1) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + (Y_2) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$= \left[(Y_1) + (Y_2) \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = (Y_{eq}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}$$

حيث: $(Y_{eq}) = (Y_1) + Y_2$ وبالتالي تجمع السماحات في حالة التوصيل على التوازي - التوازي.

5-6-د : التوصيل على التتابع :



الشكل (ص ١٠ - 17)

يعرف عن كل رباعي قطب بمصفوفة التكبير (A) الخاصة به وذلك حسب طريقة التوصيل الموضحة في الشكل (ص ١٠ - 17).

حيث : $i_2 = i_2''$ و $i_1'' = i_2'$ و $i_1 = i_1'$

$v_2 = v_2''$ و $v_1'' = v_2'$ و $v_1 = v_1'$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} i_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = (A_{eq}) \begin{pmatrix} i_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \longrightarrow (1)$$

وبحساب (A_{eq}) نستنتج :

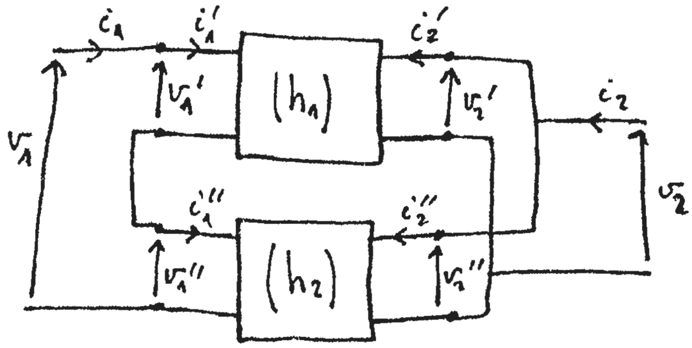
$$\begin{pmatrix} i_2'' \\ v_2'' \end{pmatrix} = (A_2) \begin{pmatrix} i_1'' \\ v_1'' \end{pmatrix} = (A_2) \begin{pmatrix} i_2' \\ v_2' \end{pmatrix} = (A_2)(A_1) \begin{pmatrix} i_1' \\ v_1' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} i_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = (A_2)(A_1) \begin{pmatrix} i_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \longrightarrow (2)$$

من (1) و (2) نلاحظ : $\boxed{(A_{eq}) = (A_2)(A_1)}$

أي أنه في حالة التوصيل على التتابع تضرب مصفوفتي التكبير وبالترتيب الموضح في هذه العلاقة الأخيرة حيث أن ضرب المصفوفات غير تبديلي.

5-6-هـ : التوصيل على التوالي والتوازي :



الشكل (ص ١٠ - 18)

في هذا النوع من التوصيل تكون المداخل متصلان على التوالي والمخارج متصلان على التوازي كما هو موضح في الشكل (ص ١٠ - 18) ومن الشكل نكتب :

$$\begin{cases} v_1 = v_1' + v_1'' \\ i_1 = i_1' = i_1'' \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 = v_2' = v_2'' \\ i_2 = i_2' + i_2'' \end{cases}$$

ومن العلاقات الوظيفية للمصفوفة الهجينة نكتب :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = (h_{eq}) \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \longrightarrow (1)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} v_1' + v_1'' \\ i_2' + i_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1' \\ i_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1'' \\ i_2'' \end{pmatrix} = (h_1) \begin{pmatrix} i_1' \\ v_2' \end{pmatrix} + (h_2) \begin{pmatrix} i_1'' \\ v_2'' \end{pmatrix} = \left[(h_1) + (h_2)\right] \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \big(\quad (2)$$

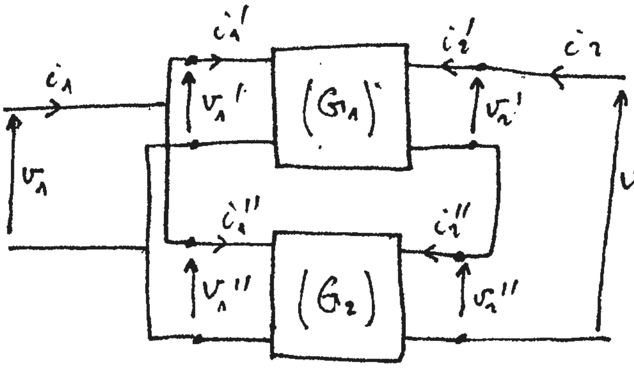
$$\boxed{(h_{eq}) = (h_1) + (h_2)}$$

من (1) و (2) نجد :

إذاً المصفوفة الهجينة المكافئة لرباعي القطب المتصلين على التوالي والتوازي يساوي حاصل جمع مصفوفتي الهجين لكل رباعي قطب على حدى.

5 - 6 - هـ : التوصيل على التوازي والتوالي :

في هذا النوع من التوصيل تكون المداخل متصلان على التوازي والمخرجان متصلان على التوالي ومن الشكل (هـ - 19) نجد :



الشكل (هـ - 19)

$$v_1 = v_1' = v_1'' \longrightarrow (1)$$
$$i_1 = i_1' + i_1'' \longrightarrow (2)$$
$$v_2 = v_2' + v_2'' \longrightarrow (3)$$
$$i_2 = i_2' = i_2'' \longrightarrow (4)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1' \\ v_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_1'' \\ v_2'' \end{pmatrix}$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} i_1' \\ v_2' \end{pmatrix} &= (G_1)\begin{pmatrix} v_1' \\ i_2' \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} i_1'' \\ v_2'' \end{pmatrix} &= (G_2)\begin{pmatrix} v_1'' \\ i_2'' \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (G_1)\begin{pmatrix} v_1' \\ i_2' \end{pmatrix} + (G_2)\begin{pmatrix} v_1'' \\ i_2'' \end{pmatrix}$$

ومن العلاقتين (1) و (4) نجد :

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (G_1)\begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + (G_2)\begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \left[(G_1)+(G_2)\right]\begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = (G_{eq})\begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (G_{eq})\begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

حيث

$$\boxed{(G_{eq}) = (G_1)+(G_2)}$$

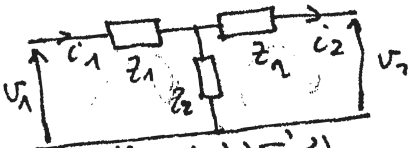
خلاصة :

	Q_1 و Q_2	رباعي القطب المكافئ
توالي-توالي	~~توازي-توازي~~	$(Z) = (Z_1)+(Z_2)$
التوازي-التوازي	P - P	$(Y) = (Y_1)+(Y_2)$
التوالي-التوازي	S - P	$(H) = (H_1)+(H_2)$
التوازي-التوالي	P - S	$(G) = (G_1)+(G_2)$
	التتابع (A)	$(A) = (A_2) \times (A_1)$
	التتابع (T)	$(T) = (T_1) \times (T_2)$

واجب: أوجد مصفوفة التحويل (Teq) المكافئة لرباعيي قطب متصلين على التتابع.

7-15 : تطبيقات :

إيجاد المصفوفات (h) و (A) و (Y) و (Z) لرباعي القطب الموضح في الشكل (15-20)



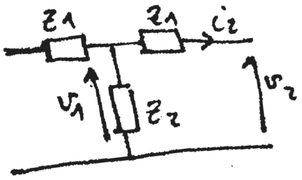
الشكل (15-20)

* ① المصفوفة (Z) :

نفترض أن :

$$(Z)=\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12}\\ z_{21} & z_{22}\end{pmatrix}$$

ومن تعريف كل عنصر من عناصر هذه المصفوفة مع الإستعانة بالشكل تمكننا إيجاد هذه العنصر بدلالة (Z_1) و (Z_2) مثلا :



- $Z_{12}=\dfrac{v_1}{i_2}\Big|_{i_1=0}$ ، لذلك يصبح الشكل السابق كمايلي :

ويكون فرق الجهد على Z_2 هو نفسه v_1 حيث لا يوجد فرق جهد على Z_1 من جهة التيار وبذلك تكون :

$$Z_{12}=\frac{v_1}{i_2}\Big|_{i_1=0}=\frac{-i_2 Z_2}{i_2}=-Z_2$$

وبالمثل :

$$Z_{21}=\frac{v_2}{i_1}\Big|_{i_2=0}=\frac{i_1 Z_2}{i_1}=Z_2$$

أما :

$$Z_{11}=\frac{v_1}{i_1}\Big|_{i_2=0}=\frac{i_1(Z_1+Z_2)}{i_1}=Z_1+Z_2$$

$$Z_{22}=\frac{v_2}{i_2}\Big|_{i_1=0}=\frac{-i_2(Z_1+Z_2)}{i_2}=-(Z_1+Z_2)$$

$$\therefore\ (Z)=\begin{pmatrix} Z_1+Z_2 & -Z_2\\ Z_2 & -(Z_1+Z_2)\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Z_1+Z_2 & -Z_2\\ Z_2 & -(Z_1+Z_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1\\ i_2\end{pmatrix}$$

② المصفوفة (Y) :

نحصل عليها كمقلوب للمصفوفة (Z)

$$\therefore\ (Y)=(Z)^{-1}=\frac{(\mathrm{Cof}\,Z)^*}{\Delta Z}.$$

$$\Delta Z=\begin{vmatrix} Z_1+Z & -Z_2\\ Z_2 & -(Z_1+Z_2)\end{vmatrix}=-(Z_1+Z_2)^2+Z_2^2\Rightarrow\Delta Z=-Z_1(Z_1+2Z)$$

$$\mathrm{Cof}(Z)=\begin{pmatrix} -(Z_1+Z_2) & -Z_2\\ Z_2 & Z_1+Z_2\end{pmatrix}\Rightarrow(\mathrm{Cof}(Z))^*=\begin{pmatrix} -(Z_1+Z_2) & Z_2\\ -Z_2 & Z_1+Z_2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow(Y)=\frac{(\mathrm{Cof}\,Z)^*}{\Delta Z}=\frac{-\begin{pmatrix} Z_1+Z_2 & -Z_2\\ Z_2 & -(Z_1+Z_2)\end{pmatrix}}{-Z_1(Z_1+2Z_2)}=\frac{\begin{pmatrix} Z_1+Z_2 & -Z_2\\ Z_2 & -(Z_1+Z_2)\end{pmatrix}}{Z_1(Z_1+2Z_2)}$$

$$(Y)=\begin{pmatrix} \dfrac{Y_1(Y_1+Y_2)}{Y_2+2Y_1} & \dfrac{-Y_1^2}{2Y_1+Y_2}\\[2ex] \dfrac{Y_1^2}{2Y_1+Y_2} & \dfrac{-Y_1(Y_1+Y_2)}{2Y_1+Y_2}\end{pmatrix}$$

③ المصفوفة (A) :

من العلاقات الوظيفية لرباعي القطب الممثل بالمصفوفة (A) نكتب

$$\begin{pmatrix} i_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i_2 = A_{11} i_1 + A_{12} v_1 \\ v_2 = A_{21} i_1 + A_{22} v_1 \end{cases}$$

حساب A_{11} :

$$A_{11} = \frac{i_2}{i_1}\Big|_{v_1=0} = \frac{i_2}{\frac{Z_2}{Z_1+Z_2} i_2} = \frac{Z_1+Z_2}{Z_2}$$

حساب A_{22} :

$$A_{22} = \frac{v_2}{v_1}\Big|_{i_1=0} = \frac{v_2}{\frac{Z_2}{Z_1+Z_2} v_2} = \frac{Z_1+Z_2}{Z_2}$$

حساب A_{12} :

$$A_{12} = \frac{i_2}{v_1}\Big|_{i_1=0} = \frac{i_2}{-Z_2 i_2} = -\frac{1}{Z_2}.$$

$$A_{21} = \frac{v_2}{i_1}\Big|_{v_1=0} = \frac{-(Z_1^2 + 2Z_1Z_2)}{Z_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{(A) = \begin{pmatrix} \frac{Z_1+Z_2}{Z_2} & -\frac{1}{Z_2} \\ -\left(\frac{Z_1^2+2Z_1Z_2}{Z_2}\right) & \frac{Z_1+Z_2}{Z_2} \end{pmatrix}}$$

④ المصفوفة (h) :

انطلاقا من المعادلات الوظيفية لـ (h) فإن :

$$h_{11} = \frac{v_1}{i_1}\Big|_{v_2=0} = \frac{\left(Z_1 + \frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}\right) i_1}{i_1} = Z_1 + \frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$$

$$h_{22} = \frac{i_2}{v_2}\Big|_{i_1=0} = \frac{i_2}{-(Z_1+Z_2)\, i_2} = \frac{-1}{Z_1+Z_2}$$

$$h_{21} = \frac{i_2}{i_1}\Big|_{v_2=0} = \frac{i_1 \left(\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}\right)}{i_1} = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2}$$

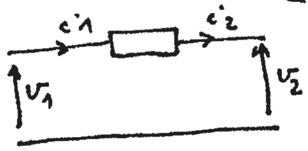
$$h_{12} = \frac{v_1}{v_2}\Big|_{i_1=0} = \frac{-Z_2 i_2}{-(Z_1+Z_2)\, i_2} = +\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}.$$

$$\Rightarrow (h) = \begin{pmatrix} Z_1 + \frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2} & +\frac{Z_2}{Z_1+Z_2} \\ \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} & \frac{-1}{Z_1+Z_2} \end{pmatrix}$$

5-8: بعض أشكال رباعيات الأقطاب:

المثال الأول:

نريد حساب (A) و (T) لرباعي القطب الموضح في الشكل التالي:



الحل: من الشكل لدينا:

$v_1 = v_2 + Z i_2$

$i_1 = 0 + i_2$ وبما أن

فإن $\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = (T)\begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{(T) = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

أما فيما يخص (A):

بما أن: $i_2 = i_1 + 0(v_1)$

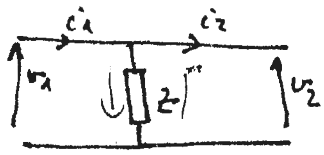
$v_2 = -Z_1 i_1 + v_1$

$$\Leftarrow \begin{pmatrix} i_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -Z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -Z & 1 \end{pmatrix}}$$

المثال الثاني:

حساب (T) و (A) أيضا لرباعي القطب التالي:



الحل: من الشكل

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = (T)\begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

وبما أن $\begin{cases} v_1 = v_2 + i_2(0) \\ i_1 = \dfrac{v_2}{Z} + i_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{pmatrix}}$$

أما المصفوفة (A):

$$\begin{pmatrix} i_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{(A) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

مثال 3:

حساب (T) و (A) لرباعي القطب التالي:

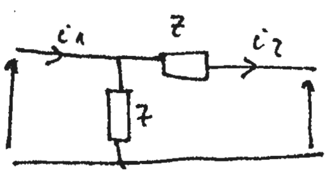
الحل: من الشكل نلاحظ أن رباعيي القطب السابقين مربوطين على التتابع ومنه:

$$* (T) = (T_1) \times (T_2) = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & Z \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{T = \begin{pmatrix} 2 & Z \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{pmatrix}}$$

أما المصفوفة (A):

$$* (A) = (A_2) \times (A_1) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -Z & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{(A) = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{Z} \\ -Z & 1 \end{pmatrix}}$$

مثال 4:



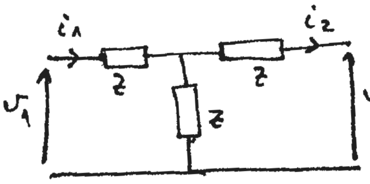
نفس السؤال السابق:

الحل:

$$* (T) = (T_2) \times (T_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ \frac{1}{Z} & 2 \end{pmatrix}$$

$$* (A) = (A_1)(A_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -Z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{Z} \\ -Z & 2 \end{pmatrix}.$$

مثال 5: نفس السؤال السابق لرباعي القطب التالي



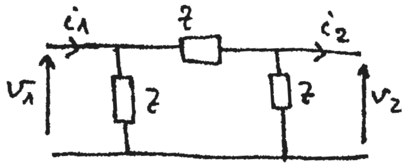
الحل: نلاحظ أن الشكل يتكون من رباعيي قطب مربوطين على التتابع وهما رباعي القطب الموجود في المثال (3) ورباعي القطب الموجود في المثال الأول ومنه:

$$(T)=(T_3)(T_1)=\begin{pmatrix}2 & Z\\ \frac{1}{Z} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & Z\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3Z\\ \frac{1}{Z} & 2\end{pmatrix}$$

أما المصفوفة (A)

$$(A)=(A_1)(A_3)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -Z & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -\frac{1}{Z}\\ -Z & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -\frac{1}{Z}\\ -3Z & 2\end{pmatrix}$$

مثال 6: نفس السؤال السابق لرباعي القطب التالي:



الحل: يتكون رباعي القطب هذا من رباعيي المثال (2) والمثال (3)
ومنه:

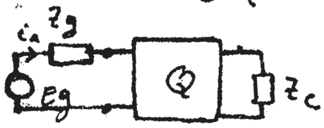
* $(T)=(T_2)(T_3)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{Z} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & Z\\ \frac{1}{Z} & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{(T)=\begin{pmatrix}2 & Z\\ \frac{3}{Z} & 2\end{pmatrix}}$

* $(A)=(A_3)(A_2)=\begin{pmatrix}2 & -\frac{1}{Z}\\ -Z & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{(A)=\begin{pmatrix}2 & -\frac{3}{Z}\\ -Z & 2\end{pmatrix}}$

9-9: تكييف الممانعات برباعي قطب خامل:

كما هو معلوم بأن الآخذة تستقبل إستطاعة أعظمية إذا كانت ممانعتها هي المرافق للمانعة الداخلية للمصدر أو المولد الذي يغذي هذه الآخذة (المولد هو مولد تيفنين إذا كانت الآخذة هي حمولة في شبكة معقدة).

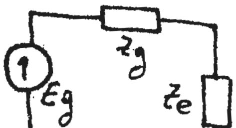
في حالة ما إذا كانت Z_c هي حمولة رباعي أقطاب كما هو مبين في الشكل (10-21) فإن ممانعة المخرج Z_s هي ممانعة تيفنين المرئية من المخرج وهكذا تكون شروط التكييف: $Z_c = Z_s^*$ إذن:



الشكل (10-21)

$$\boxed{Z_c^* = Z_s = Z_{22} - \frac{Z_{12}\,Z_{21}}{Z_{11}+Z_g}}$$

وهذا هو الشرط اللازم تحقيقه حتى ينقل الرباعي إلى الحمولة إستطاعة أعظمية
وأحسن من ذلك إذا استقبل الرباعي من المصدر الذي يغذيه إستطاعة أعظمية وطبيعة الحال مرئيا من المدخل تكافئ رباعي الأقطاب ممانعة المدخل Z_e، فكأن المصدر E_g الذي يغذي الرباعي يغذي الممانعة Z_e (المكافئة للرباعي من المدخل).



الشكل (10-22)

فالشرط الذي يجعل الرباعي يستقبل إستطاعة أعظمية هو شرط التكييف
$$Z_e = Z_g^*$$

إذن:

$$\boxed{Z_g^* = Z_e = Z_{11} - \frac{Z_{12}\,Z_{21}}{Z_{22}+Z_e}}$$