الفصل -4-

معادلة شرودينجر
ودراسة الكمون احادي البعد

I. معادلة شرودينجر:

مقدمة . في عام 1925 استطاع شرودينجر وضع نظرية جديدة التي أسماها " معادلة شرودينجر" تصف الكمية للجسيم الإلكترون وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية وحلها يعطي دالة موجية تصف سلوك الجسيمات المادية في الحالة الكمية وهي تنتشر لتملأ الفراغ كله وتأخذ قيم كبرى في مكان تواجد الجسيم وتضعف كلما ابتعدنا عنه وتشبه إلى حد كبير معادلة نيوتن في الميكانيك الكلاسيكي ، معادلة ماكسويل لوصف المجال الكهرومغناطيسي .

- معادلة Schrödinger

لدينا حسب قانون دوبرغلي الجسيمات $\lambda = h/p$ ولدينا: $E = h\nu = \hbar\omega$.

وبالتالي فإن الحركة الحرة لجسيم ذو إندفاع P وطاقة E توصف بموجة ذات العدد الموجي $K = \frac{2\pi}{\lambda} = P/\hbar$ وذات .

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi E/h = E/\hbar .$$

. نكتب الطاقة الكلية لجسيم خاضع لكمون V $(v \ll c)$ بالشكل :

$$E = E_c + V = \frac{1}{2} m v^2 + V$$

$$= \frac{p^2}{2m} + V = \frac{\hbar^2}{2m} K^2 + V .$$

- الأمواج الكلاسيكية : في الميكانيك الكلاسيكي تصف الأمواج بمقادير موجية مثل سعة الاهتزاز (اهتزاز حبل مثلا) .

وفق معادلة تفاضلية من الشكل:

$$\Delta \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

. بالنسبة لبعد واحد.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

سرعة إنتشار الأمواج.

نعلم أن هذه المعادلة التفاضلية تقبل الحل العام:

$$\boxed{\psi(x,t) = A_0 \sin(\omega t \mp kx)}$$

- الأمواج في الميكانيك الكمي: وهي تصف ديناميك الجسيمات الكمية. وتصف احتمال تواجد الجسيم في الفضاء واحتمال ارتفاعه.

ويكون الشكل العام لهذه المعادلة:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r},t) + V(\vec{r}).\psi(\vec{r},t) \quad \ldots (I\text{-}1)$$

وهي تصف نظام فيزيائي كمومي، وتصف الحركة الموجية للجسمات

. إذا كان الكمون مستقلا عن الزمن ولكون الطاقة محفوظة فإنه يكون لدينا حالات كمية ذات طاقات محددة تماما. ندعى هذه الحالات بالحالات المستقرة. وبإستخدام طريقة فصل المتغيرات فإنه في الحالات المستقرة يمكن وضع الدالة الموجية على الشكل التالي:

$$\psi(x,t) = F(t)\, \varphi(x).$$

نعوض في $(I\text{-}1)$

$$i\hbar\, \varphi(x) \frac{\partial}{\partial t} F(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} F(t) \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} + V(x).F(t).\varphi(x)$$

ثم بالقسمة على $F(t)\,\varphi(x)$:

$$i\hbar \frac{1}{F(t)} \frac{\partial}{\partial t} F(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} + V(x)$$

- باستخدام طريقة فصل المتغيرات يدل على أن طرفي هذه المعادلة

لا بد أن يكون ثابت، تسمى E هذا الثابت:

$$i\hbar \frac{1}{F(t)} \frac{\partial}{\partial t} F(t) = E$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} + V(x) = E$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i\hbar \dfrac{\partial F(t)}{\partial t} = E\,F(t) \quad \text{....(I-2)} \\[2ex] -\dfrac{\hbar^2}{2m} \dfrac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} + V(x).\varphi(x) = E\,\varphi(x) \quad \text{..(I-3)} \end{cases}$$

معادلة شرودينجر المستقلة عن الزمن.

حل المعادلة (I-2) هو:

$$F(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \quad , \omega = E/\hbar .$$

إذن من أجل الحالات المستقرة:

$$\boxed{\Psi(x,t) = \varphi(x) . e^{-\frac{iE}{\hbar}t}} \quad .\;.\;.\;.\;.\;. \quad (I-4)$$

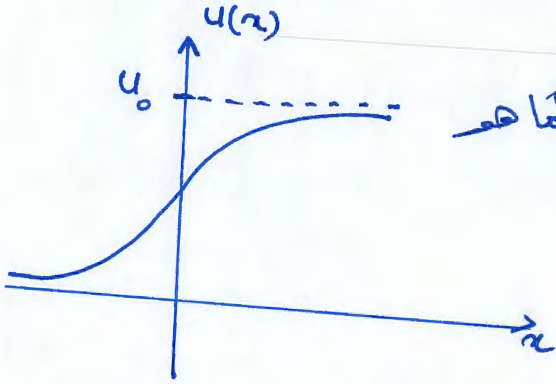
ويمكن كتابة المعادلة (I-3) كما يلي:

$$\begin{cases} H\,\varphi(x) = E\,\varphi(x) . \\ H = -\dfrac{\hbar^2}{2m} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \end{cases}$$

الهاملتون

فعندما يكون جسيم موجود في حالة مستقرة فإنه يوصف بدالة موجية من الشكل (I-4) وتكون طاقته محددة تماما وتساوي E

معاملات العبور والانعكاس .



لندرس حركة جسيم كتلته m في حقل كما هو موضح في الشكل:

• $U(x)\nearrow$ (من 0 إلى ∞) أي قيمة أخرى

• $U=U_0$ $(x\to+\infty)$. يرتد الجسيم ذو الطاقة $\boxed{U_0>E}$ المتحرك من اليسار إلى اليمين

في الميكانيك الكوانتي تبرز ظاهرة جديدة ، اذ يمكن للجسيم أن يرتد عن

الحاجز الكموني حتى عندما تكون $E>U_0$.

نقوم بحساب عامل الانعكاس:

- نفرض أن الجسيم متحرك من اليسار إلى اليمين ، وندرس

التوابع الموجية المقاربة من أجل قيم كبيرة سالبة ثم موجبة للإحداثية x

(أ) - عند $(x\to-\infty)$ $(U\to 0)$ وهو عبارة عن تركيب خطي لحلين أي:

$$x\to-\infty:\ \begin{cases}\varphi(x)=\underbrace{A_1 e^{ik_1x}}+\underbrace{B_1 e^{-ik_1x}}\\ k_1=\dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\end{cases}$$

$A_1 e^{ik_1x}$ ← يوافق جسيما ساقطا على الحاجز (موجة ساقطة)

$B_1 e^{-ik_1x}$ ← يوافق جسيما مرتدا عن الحاجز (موجة منعكسة).

(ب) - عندما $(x\to+\infty)$: التابع الموجي يصف جسيما مارًّا فوق الحاجز متحركا

في الاتجاه الموجب (موجة عابرة) .

$$x \to +\infty : \begin{cases} \varphi(x) = A_2 e^{iK_2 x} \\ K_2 = \dfrac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar} \end{cases}$$

لنحسب الآن كثافة تيار الإحتمال في الأمواج الساقطة والمنعكسة والعابرة

. لدينا في الحالة العامة :

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{2m}\left(\varphi^* \vec{\nabla}\varphi - \varphi \vec{\nabla}\varphi^*\right)$$

نجد الموجة الساقطة

$$J_0(x) = \frac{\hbar K_1}{m} |A_1|^2$$

الموجة المنعكسة

$$J_r(x) = -\frac{\hbar K_1}{m} |B_1|^2.$$

إشارة (-) تدل أن التيار منعكس (عكس جهة التيار الساقط)

للموجة العابرة :

$$j_t(x) = \frac{\hbar K_2}{m} |A_2|^2.$$

نعرف عامل العبور T

$$T = \frac{j_t(x)}{j_0(x)} = \frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{|A_2|^2}{|A_1|^2}.$$

أما عامل الإنعكاس R :

$$R = \frac{|j_r(x)|}{j_0(x)} = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}$$

ولمصونية كثافة تيار الإحتمال

$$R + T = 1.$$

الكمونات المربعة:

سندرس في هذا الفصل على التطبيقات ذات الأشكال المربعة للكمون، وهي في حقيقة أنظمة مثالية لا وجود لها في الطبيعة، إلا أن دراستها تقرب لنا النتائج الحقيقية للأنظمة الحقيقية وتأخذ الكمونات المربعة الأشكال متغيرة.

ولتعيين الحالات المستقرة لحركة جسيم كتلته m في حقل كمون خارجي مستقر $V(x)$ نبحث عن حل هذه المعادلة التفاضلية لشرودينجر:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(x)\right)\psi(x) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (I\text{-}5)$$

والبحث عن القيم الذاتية لمؤثر الطاقة...

لأن المعادلة $(I\text{-}5)$ هي معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية يمكن إيجاد الحلول التحليلية الدقيقة لها لبعض أشكال مؤثر الطاقة الكامنة.

ولتحديد قيم الطاقة والدوال الموجية لأي نظام فيزيائي في الحالة الكمية نطبق: * استمرارية الدالة الموجية.

* " مشتقة الأولى لدالة الموجية.

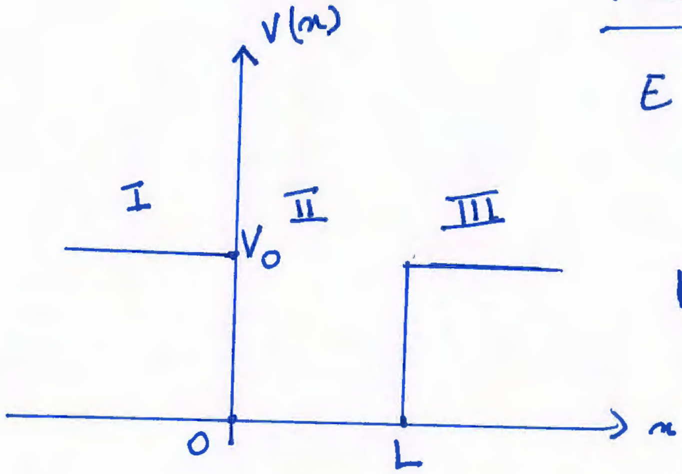
- البئر الكموني المنتهي:

لندرس جسيما كتلته m وطاقته E معطى ب:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq L \\ V_0 & x > L\,;\ x < 0 \end{cases}$$

بحيث $0 < E < V_0$

أي أن: الجسيم يكون مقيد داخل البئر.



البئر الكموني المنتهي أحادي البعد.

معادلة شرودنجر المستقلة عن الزمن :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+V(x)\varphi(x)=E\varphi(x)$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}+\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}=(E-V)\varphi(x) \quad \ldots\ (I-6)$$

الحل العام لهذه المعادلة :

$$\varphi_i(x)=A_i e^{ik_i x}+B_i e^{-ik_i x}.$$

بالتعويض في (I-6) نجد أن الحل يكون بشرط :

$$K_i^2=\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}.$$

• في خارج البئر : $(E<V_0)$

K_1 و K_3 يكون تخيلي

$$iK_1=iK_3=\rho_2=\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}} \Rightarrow \rho_2^2=\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2} \Rightarrow \rho_2^2+K_2^2=\frac{2mV_0}{\hbar^2}=K_0^2$$

إذن الدالة الموجية :

$$\varphi_{1,3}(x)=A_{1,3}e^{\rho_2 x}+B_{1,3}e^{-\rho_2 x}.$$

• في داخل البئر : $(V_0=0)$

$$K_2=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}.$$

$$\varphi_2(x)=A_2e^{ik_2x}+B_2e^{-ik_2x}.$$

• نرفض الحلول التي لا تحقق الشروط الحدية للدالة الموجية في جوار ∞ .

ومنه الحلول هي :

$$\begin{cases}\varphi_1(x)=A_1e^{\rho_2 x}\\ \varphi_2(x)=A_2e^{ik_2x}+B_2e^{-ik_2x}.\\ \varphi_3(x)=B_3e^{-\rho_2 x}.\end{cases}$$

$$\varphi_1(0)=\varphi_2(0) \quad , \quad \frac{d\varphi_1(0)}{dx}=\frac{d\varphi_2(0)}{dx}.$$
$$\varphi_2(L)=\varphi_3(L) \quad , \quad \frac{d\varphi_2(L)}{dx}=\frac{d\varphi_3(L)}{dx}.$$

بالتعويض نتحصل

$$\begin{cases} A_1 = A_2 + B_2 \;;\; A_1 \rho_2 = A_2 k_2 - B_2 k_2 \\ A_2 e^{ik_2L} + B_2 e^{-ik_2L} = B_3 e^{-\rho_2 L} \;,\; A_2 k\, e^{ik_2L} - B_2 k\, e^{-ik_2L} = -B_3 \rho_2 e^{-\rho_2 L} \end{cases}$$

وللتبسيط نكتب الدالة الموجية كمايلي

$$\varphi_2(x) = A_2' \cos(k_2 x) + B_2' \sin(k_2 x)$$

ونستعمل الاستمرار ونتحصل كمايلي :

$$\boxed{A_1 = A_2'} \quad , \quad A_1 \rho_2 = B_2' k_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_2' = \frac{\rho_2}{k_2} A_1}$$

$$A_2' \cos(k_2L) + B_2' \sin(k_2L) = B_3 e^{-\rho_2 L} \quad , \quad -k_2 A_2' \sin(kL) + k_2 B_2' \cos(kL) = -\rho_2 B_3 e^{-\rho_2 L}$$

بقسمة العلاقتين الأخيرتين :

$$\frac{-k_2 A_1 \sin(k_2L) + k \frac{\rho_2}{k_2} A_1 \cos(k_2L)}{A_1 \cos(k_2L) + \frac{\rho_2}{k} A_1 \sin(k_2L)} = -\rho_2$$

$$\Rightarrow \cancel{A_1} \quad \frac{k_2^2 \sin(k_2L) + k_2\rho_2 \cos(k_2L)}{k_2 \cos(k_2L) + \rho_2 \sin(k_2L)} = \rho_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{k_2^2 \sin(k_2L) - k_2\rho_2 \cos(k_2L)}{k_2\rho_2 \cos(k_2L) + \rho_2^2 \sin(k_2L)} = 1$$

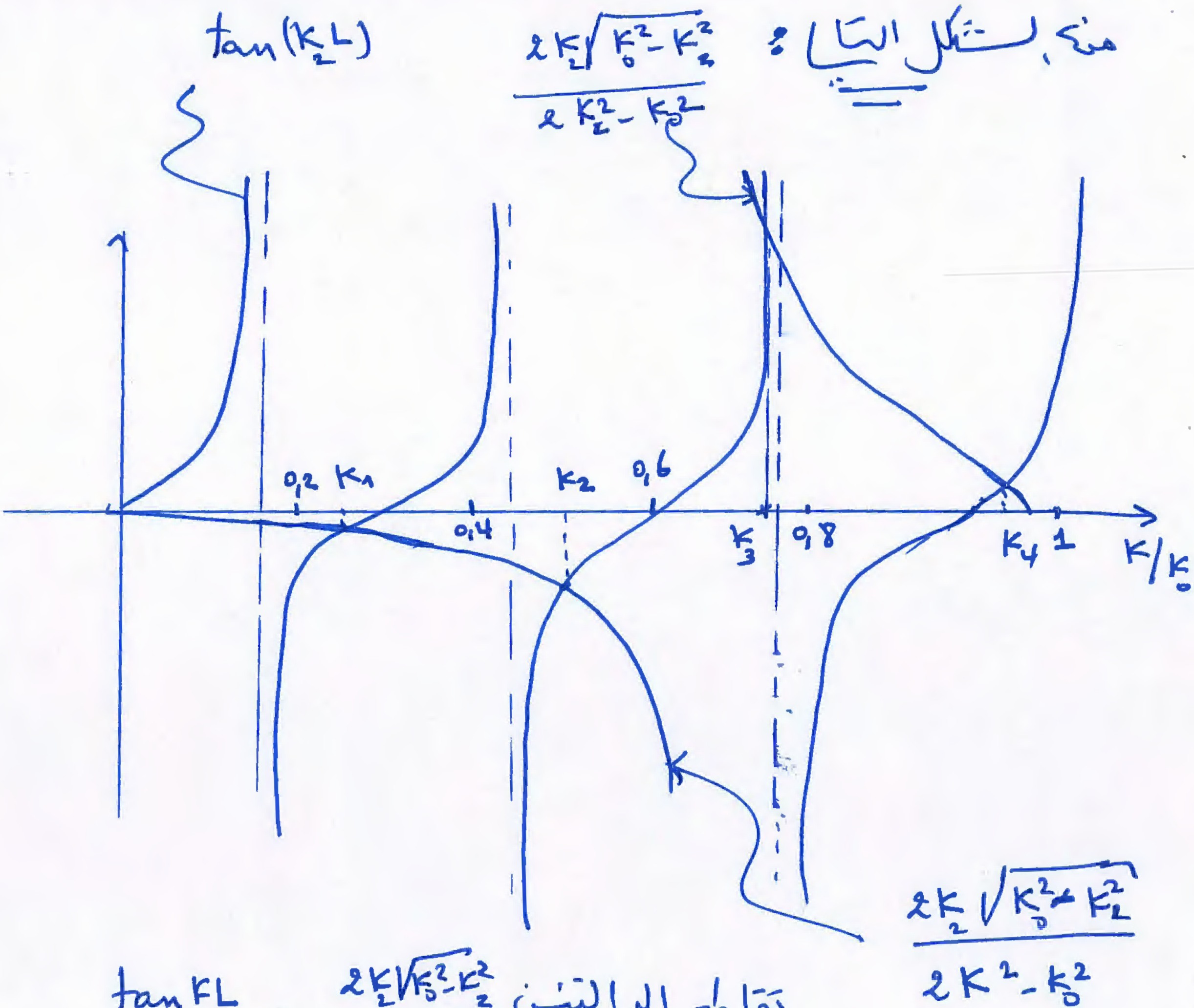
بالتبسيط :

$$\tan(kL) = \frac{2\rho_2 k_2}{k_2^2 - \rho_2^2}$$
$$= \frac{2k_2\sqrt{k_0^2 - k_2^2}}{2k_2^2 - k_0^2}$$

حيث : $k_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$: عدد ثابت

هذه المعادلة تقبل عددا محدودًا من الحلول ، وهذه الحلول تأخذ قيم k_n والتي بدورها تعطينا مستويات الطاقة المقيدة .

منه الشكل التالي :



تقاطع الدالتين $\frac{2K_2\sqrt{K_0^2-K_2^2}}{2K_2^2-K_0^2}$ و $\tan KL$

من أجل $K_0L=10$

نجد تقاطع الدالتين $\tan KL$ و $\frac{2K_2\sqrt{K_0^2-K_2^2}}{2K_2^2-K_0^2}$ نلاحظ وجود أربع حلول :

وهي $K_1=0,261K_0$, $K_2=0,519K_0$, $K_3=0,767K_0$, $K_4=0,981K_0$

إذن نستنتج أربع حالات مقيدة للطاقات الذاتية

وهي $E_1=0,261V_0$, $E_2=0,519V_0$, $E_3=0,767V_0$, $E_4=0,981V_0$

وهي مستويات الطاقة المقيدة من أجل المثال الذي إخترناه $K_0L=10$.

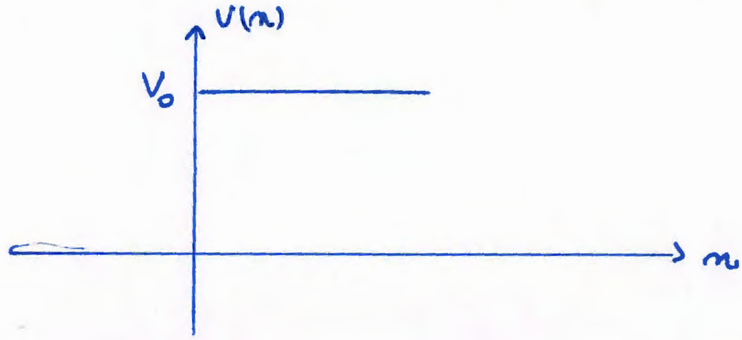
وأخيرا نجد B_2 $\sin K_2L=\pm\frac{2\rho K_2}{K_2^2+\rho^2}$, $\cos K_2L=\pm\frac{K_2^2-\rho_2^2}{K_2^2+\rho_2^2}$

إذن نجد ببساطة $B_3=\pm A_1e^{\rho_2L}$.

الجدار الكمونى

تتحرك جسيم على المحور x في الإتجاه الموجب (من اليسار إلى اليمين).

نعتبر جسيم طاقته E يأتي من $x<0$ ويصل إلى جدار كموني ارتفاعه V_0.



والمعرف:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & x>0 \\ 0 & x<0. \end{cases}$$

نكتب معادلة شرودينجر في المنطقتين: $(x<0 , x>0)$.

$\boxed{x<0}$:
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = (E - \overset{0}{V_0})\varphi(x)$$

$\boxed{x>0}$:
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = (E - V_0)\varphi(x).$$

① - حالة الإنعكاس $\boxed{E>V_0}$

$$K_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

$$K_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}.$$

وبالتالي نكتب الحلول بالشكل:

$$\varphi_1 = A_1 e^{iK_1x} + B_1 e^{-iK_1x}.$$

$$\varphi_2 = A_2 e^{iK_2x} + B_2 e^{-iK_2x}.$$

أي أن :

$\varphi_1(x)$: عبارة عن مجموع موجتين مستويتين .

← الحد الأول : موجة ساقطة (من اليسار إلى اليمين) $\longrightarrow K_1$.

← " الثاني : " منعكسة $\longrightarrow K_1$.

$\varphi_2(x)$: عبارة عن مجموع موجتين مستويتين .

← الحد الأول : موجة عابرة (متحركة من اليسار إلى اليمين) $\longrightarrow K_2$.

← " الثاني : " ساقطة (من اليمين إلى اليسار) $\longrightarrow K_2$

ومما سبق إقتصارنا على دراسة الأمواج الساقطة من اليسار إلى اليمين

لذا نضع :

موجة عابرة فقط . $\longrightarrow \varphi_2(x)$ نعتبر $B_2 = 0$

$$\Rightarrow \varphi_2(x) = A_2 e^{iK_2 x}.$$

نكتب شرطي إستمرار $\varphi(x)$ و $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ في النقطة $(x = 0)$.

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) \qquad \Rightarrow \qquad A_1 + B_1 = A_2$$

$$\frac{d\varphi_1(0)}{dx} = \frac{d\varphi_2(0)}{dx}. \qquad \Rightarrow A_1 K_1 - B_1 K_1 = K_2 A_2.$$

وبعد الحساب نجد :

$$\begin{cases} B_1 = \dfrac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} A_1 \\ A_2 = \dfrac{2K_1}{K_1 + K_2} A_1 \end{cases}.$$

نحسب كثافة كل تيارات الاحتمالات الساقطة والمنعكسة والعابرة.

$$j_0(x) = \frac{\hbar k_1}{m} |A_1|^2$$

$$j_r(x) = -\frac{\hbar k_1}{m} |B_1|^2$$

$$j_t(x) = \frac{\hbar k_2}{m} |A_2|^2.$$

$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = \frac{\left|\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right|^2 \cancel{|A_1|^2}}{\cancel{|A_1|^2}} = \left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2 = 1 - \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}$$

$$T = \frac{k_2}{k_1}\cdot\frac{|A_2|^2}{|A_1|^2} = \frac{k_2}{k_1}\cdot\frac{\left|\frac{2k_1}{k_1+k_2}\right|^2 \cancel{|A_1|^2}}{\cancel{|A_1|^2}} = \frac{k_2}{\cancel{k_1}}\cdot\frac{4k_1^{\cancel{2}}}{(k_1+k_2)^2}$$

$$T = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}.$$

من الواضح $R+T=1$

* من الممكن أن يرتد الجسيم عند الجدار الكموني.
* على عكس الميكانيك الكلاسيكي يكون احتمال ارتداد الجسيم عند الجدار الكموني غير معدوم، بل يوجد انعكاس جزئي.
* بما أن $\frac{B_1}{A_1}$ و $\frac{A_2}{A_1}$ حقيقيان فالموجة الساقطة إما أن تنعكس أو تعبر بدون أي تأخر

ملاحظة خاصة:

$E \gg V_0 \longrightarrow k_2 = k_1 \Leftarrow R=0$ و $T \simeq 1 \Leftarrow$ تعبر الجسيمات عالية الطاقة من فوق الجدار الكموني دون انعكاس $\Leftarrow$ يبدو لها وكأن هذا الجدار غير موجود أصلا.

② حالة الانعكاس الكلي : $\boxed{E < V_0}$

$$x < 0 : \quad \frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\,\varphi_1(x) = 0.$$

$$x > 0 : \quad \frac{d^2\varphi_2(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\,\varphi_2(x) = 0.$$

نضع :

$$K_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}$$

في هذه الحالة K_2 مقدار تخيلي ، لذا ندخل عوضاً عنه المقدار الحقيقي

$$\rho_2 = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}.$$

وحلها من الشكل :

$$x < 0 : \quad \varphi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}.$$

$$x > 0 : \quad \varphi_2(x) = A_2' e^{\rho_2 x} + B_2' e^{-\rho_2 x}$$

كي يبقى هذا الحل محدود عند $(x \to +\infty)$ وضع $A_2' = 0$:

$$x > 0 : \quad \varphi_2(x) = B_2' e^{-\rho_2 x}.$$

بنفس الطريقة السابقة نجد :

$$B_1 = \frac{K_1 - i\rho_2}{K_1 + K_2} A_1$$
$$B_2' = \frac{2K_1}{K_1 + K_2} A_1 \Longleftarrow \begin{cases} \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \\ \dfrac{d\varphi_1(0)}{dx} = \dfrac{d\varphi_2(0)}{dx} \end{cases}$$

ومنه . كثافة كل من تيارات الاحتمال السابقة والمنعكسة والعابر

نجد : $R = \left| \frac{K_1 - i\rho_2}{K + i\rho_2} \right| = 1$ مع العلم $(i\rho_2 = K_2)$.

وعليه، وكما هو الحال في الميكانيك الكلاسيكي يرتد الجسيم في هذه الحالة دوما عن الجدار الكموني (إنعكاس كلي) - إلا أنه يوجد فارق جوهري بين الميكانيكين الكلاسيكي والكوانتي، ذلك أن وجود الموجة المتخامدة $e^{-\rho_2 x}$ يشير إلى وجود احتمال غير معدوم لوقوع الجسيم في المنطقة (المحرمة) كلاسيكيا.

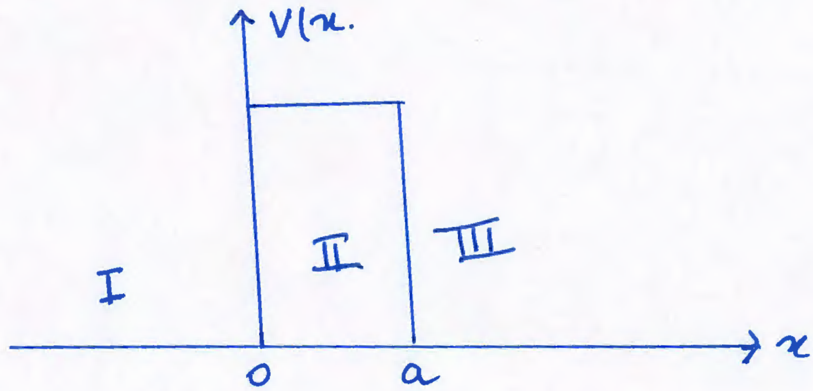
يتناقص هذا الاحتمال مع تزايد x وفق أسي، ويصبح مهملا عندما تصبح x أكبر من $\frac{1}{\rho_2}$ الذي يدعى بمدى الموجة المتخامدة.

نشير إلى أن النسبة $\frac{B_1}{A_1}$ عدد مركبا، مما يدل على وجود اختلاف في الطور عند الانعكاس.

إن ذلك عائد فيزيائيا إلى التأخر الزمني لانعكاس الجسيم نتيجة لتغلغله في المنطقة المحرمة كلاسيكيا $(x>0)$.

الحاجز الكموني:

لندرس حركة جسيم كتلته m في الحقل الممثل في الشكل:



الحاجز الكموني

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 \le x < a \\ 0 & x>0,\ x<a. \end{cases}$$

تكتب معادلة شرودينجر في المناطق التالية

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2} + \dfrac{2mE}{\hbar^2}\varphi_1(x) = 0 & \cdots \\ \dfrac{d^2\varphi_2(x)}{dx^2} + \dfrac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\varphi_2(x) = 0. \\ \dfrac{d^2\varphi_3(x)}{dx^2} + \dfrac{2m}{\hbar^2}E\varphi_3(x) = 0 \end{cases}$$

نميز حالتين:

1 - حالة التجاوز $\boxed{E > V_0}$

$$\varphi_1(x) = A_1 e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x}.$$

$$\varphi_2(x) = A_2 e^{ik_2x} + B_2 e^{-ikx}.$$

$$\varphi_3(x) = A_3 e^{ik_3x} + B_3 e^{-ikx}.$$

نعتبر أن الجسيم يسقط من اليسار إلى اليمين لذا نضع $B_3 = 0$

$$\begin{cases} k_{1/3} = \sqrt{\dfrac{2m}{\hbar^2}E} \\ k_2 = \sqrt{\dfrac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}} \end{cases}$$

نكتب شروط استمرار $\varphi(x)$ و $\dfrac{d\varphi(x)}{dx}$ في المنطقتين في النقطتين $x = a ; x = 0$.

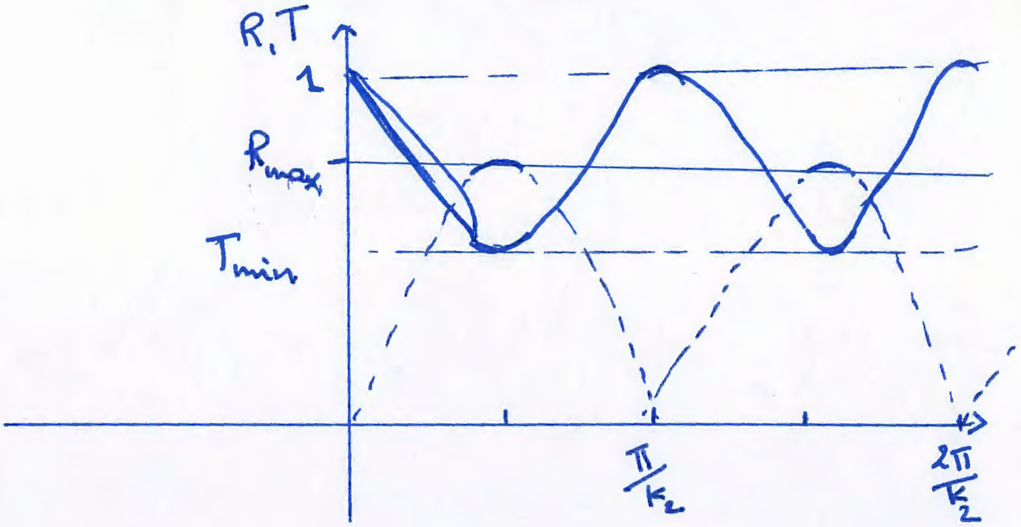
بعد الحساب نجد..

$$R = \frac{(k_2^2 - k_1^2)\sin^2 k_2 a}{4k_1^2k_2^2 + (k_2^2-k_1^2)^2\sin^2 k_2 a}$$

$$T = \frac{4k_1^2k_2^2}{4k_1^2k_2^2 + (k_2^2-k_1^2)^2\sin^2 k_2 a}$$

بالتعويض بـ k_1 و k_2 نجد

$$T = \frac{4E(E-V_0)}{4E(E-V_0) + V_0^2 \sin^2\left[\frac{a}{\hbar}\sqrt{2m(E-V_0)}\right]}.$$



$T_{max} = 1$ ⟵ يتم التجاوب عندما يكون $k_2 a = n\pi$ $(n = 0, 1, \dots)$.

D) ظاهرة النفق $\boxed{E < V_0}$

ندخل في هذه الحالة عوضا عن k_2 المدخول ρ_2 .

*نستعمل شروط الاستمرار في النقطتين $x=0$ و $x=a$ بحساب عاملي الانعكاس و العبور من خلال الحاجز الكموني .

*إلا أنه لا داعي لإجراء هذه الحسابات، إذ يكفي كما رأينا في السابق للحصول على هذه العاملين من أجل $E<V_0$، استبدال k_2 بـ ρ_2 في كل من عاملي الانعكاس و العبور في الحالة $E>V_0$، وملاحظة $\sin ix = i\,sh\,x$

$$T = \frac{4k_1^2\rho_2^2}{4k_1^2\rho_2^2 + (k_1^2+\rho_2^2)^2 sh^2 \rho_2 a} = \frac{4E(V_0-E)}{4E(E-V_0) + V_0^2 sh^2\left[\frac{a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)}\right]}$$

• يكون الحاجز ضعيف الشفافية أي : $\rho_2 \cdot a \gg 1$

$$\frac{2ma^2(V_0-E)}{\hbar^2} \gg 1 \Rightarrow T = \frac{16k_1^2\rho_2^2}{(k_1^2+\rho_2^2)^2} e^{-2\rho_2 a} = \frac{16E(V_0-E)e^{-2\rho_2 a}}{V_0^2}$$

تدعى هذه العلاقة العمل النفقي.

وهي تبين أن عامل العبور يتناقص وفق قانون أسي مع تزايد عرض الحاجز الكمومي a، بينما يتزايد مع ارتفاع الطاقة E .