الفصل -2- مسلمات ميكانيك الكم

مقدمة

في الإطار الفيزياء الكلاسيكية كلنا على دراية بأنه يمكن وصف الجسيم المادي في لحظة زمنية t محددة بدقة بمتغيرين أساسيين وهما الموضع $\vec{r}$ وكمية حركة $\vec{p}$. وهو خاضع إلى قوانين الثلاثة لنيوتن، حيث يمكن استخراج معظم جميع المقادير الفيزيائية لحركة هذا الجسيم بدلالة $\vec{r}$ و $\vec{p}$.

وقد عممت هذه القوانين فيما بعد بما تعرف معادلات لهاملتون.

ونعطي بالعلاقات الآتية:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}(\vec{p},\vec{r},t). \quad , \quad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}(\vec{p},\vec{r},t).$$

حيث

$$H(\vec{p},\vec{r},t) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r},t).$$

ونجد:

$$\dot{\vec{p}} = -\nabla \vec{V}(\vec{r},t)$$

وهذه الأخيرة نعطي معادلات الحركة للجسم.

أما الحالة الكمية لا يمكن تحديد موضع وسرعة الجسم في آن واحد، وإنما تخضع لمبدأ الشك لهايزنبرغ $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar$.

- كذلك أن حالة الجسيم في اللحظة t توصف بالتابع الموجي $\psi(\vec{r},t)$ و $|\psi(\vec{r},t)|^2$ هو عبارة عن احتمال تواجد الجسيم في اللحظة t والموضع $\vec{r}$.
- نرفق كل دالة موجية $\psi(\vec{r},t)$ بواسطة كات $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

أي: $\psi(\vec{r},t) = \langle \vec{r}|\psi\rangle$

ولوصف الحالة الكمية نتبع المسلمات التالية:

المسلمة ① : حالة النظام الفيزيائي.

الحالة الديناميكية للنظام الفيزيائي في اللحظة الزمنية t تكون معطاة بالكات $|\psi\rangle$ في الفضاء هيلبرت $(\mathcal{H})$.

في التمثيل $\{|\vec{r}\rangle\}$ للإحداثيات $\psi(\vec{r},t)=\langle\vec{r}|\psi(t)\rangle$

. أي في لحظة زمنية t تعرف حالة الجملة بإعطاء شعاع كات $|\psi(t)\rangle$ الذي ينتمي إلى فضاء الحالات $\mathcal{E}$ يدعى $|\psi(t)\rangle$ بشعاع الحالة .

المسلمة ② : (فيزيائي) مقادير الفيزيائية المقاسة .

لكل متغير ديناميكي في مقدار فيزيائي المقاس A الذي هو المشاهد فهو مرتبط بمؤثر A (observable) في فضاء الحالات $\mathcal{E}$.

متغيرات فيزيائية		مؤثرات فيزيائية	
الإسم	الرمز (مقادير الفيزيائية)	الرمز	مؤثر
الموضع	$x, y, z : r$	$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} : \hat{r}$	
كمية الحركة	$\vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z : \vec{P}$	$\hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{P}_z : \hat{P}$	$\hat{P}_x=\frac{\hbar}{i}\cdot\frac{d}{dx}$ $=\frac{\hbar}{i}\cdot\nabla(x,y,z)$
الطاقة الحركية	$\vec{T}_x, \vec{T}_y, \vec{T}_z : \vec{T}$	$\hat{T}_x, \hat{T}_y, \hat{T}_z : \hat{T}$	$\hat{T}_x=\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta x$ $\hat{T}=\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta(x,y,z)$
الطاقة الكامنة	$\vec{V}_x, \vec{V}_y, \vec{V}_z : \vec{V}$	$\hat{V}_x, \hat{V}_y, \hat{V}_z : V$	
الطاقة الكلية	$E_x, E_y, E_z : E$	$\hat{H}_x, \hat{H}_y, \hat{H}_z : \hat{H}$	$\hat{H}=\hat{T}+\hat{V}$ $=\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta+V$
	$L_x=yP_z-zP_y$ $L_y=zP_x-xP_z$ $L_z=xP_y-yP_x$	$\hat{L}_x=y\hat{P}_z-z\hat{P}_y$ $\hat{L}_y=z\hat{P}_x-x\hat{P}_z$ $\hat{L}_z=x\hat{P}_y-y\hat{P}_x$	$=\frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)$ $=\frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right)$ $=\frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)$

مثال

$$\hat{T}_x = \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{2m}\hat{P}_x^2 .$$

$$\Rightarrow \hat{T}_x = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta(x) .$$

$$\hat{V}_{(r)} = k\frac{e^2 Z}{r} .$$

المسلمة ③ قياس A .

نتيجة لقياس في مقدار فيزيائي A ليس هي إلا قيم الذاتية للمشاهد (الملاحظ) A الموافق

① . إحتمالية قياس مقدار A في نظام الحالة $|\Psi(\vec{r},t)|$ يأخذ القيم الذاتية a_n المنحط g_n للملاحظ الموافق هو :

$$P(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} \frac{|C_n^i|^2}{\langle \Psi|\Psi\rangle} .$$

حيث :

$$C_n^i = \langle U_n^i|\Psi\rangle .$$

$|U_n^i\rangle$: تمثل الأشعة الذاتية .

$$\hat{A}\Psi = \lambda_i \Psi .$$

ⓑ - نتائج :

① . القيم المتوسطة للمشاهد $\hat{A}$:

القيمة المتوسطة لمقدار A الموضوعة $\langle A\rangle$ هي متوسط النتائج لعدد المقاسي A في الحالة $|\Psi\rangle$:

$$\langle A\rangle = \frac{\langle \Psi|A|\Psi\rangle}{\langle \Psi|\Psi\rangle}$$

أمثلة :

$$\langle \hat{x}\rangle = \frac{\langle \Psi|\hat{x}|\Psi\rangle}{\langle \Psi|\Psi\rangle} = \int \Psi^* \hat{x}\, \Psi(x)\, dx .$$

$$\langle \hat{P}_x\rangle = \frac{\langle \Psi|\hat{P}_x|\Psi\rangle}{\langle \Psi|\Psi\rangle} = \int \Psi^*(x) . \hat{P}_x . \Psi(x)\, dx .$$

② - الإنحراف التربيعي المتوسط (Ecrat quadratique moyen)

إن القيمة المتوسطة $\langle A\rangle_\psi$ تدل على رتبة القيم التي يأخذها المشاهد A عندما يكون النظام الفيزيائي في الحالة $|\psi\rangle$ ولكن هذه المتوسطة لا تفيد بأي معلومة عن دقة النتائج.

إذن ما هو المجال المجاور للقيمة المتوسطة $\langle A\rangle_\psi$ الذي سنحصل فيه على النتائج لقياس المقدار A والذي يدعى بالإنحراف التربيعي المتوسط وهو معرف بـ : $(\Delta A)_\psi$.

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 .$$

③ - علاقة هايزنبرغ (مبدأ الشك لهايزنبرغ).

ليكن المشاهدين كيفيان $\hat{A}$ و $\hat{B}$

بحيث : $[\hat{A},\hat{B}] = i\hbar$

إذن : $\Delta A \cdot \Delta B \geqslant \frac{1}{2}[A,B] = \frac{\hbar}{2}$.

④ - المسلمة

عند قياس مقدار فيزيائي a في الحالة $|\psi\rangle$ بحيث نحصل على النتيجة a_n، فإن حالة الجملة بعد القياس تساوي الإسقاط المنظم للحالة $|\psi\rangle$ على الفضاء المرافق للقيمة الذاتية a_n.

مثال :

ليكن : $A : \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

الملاحظ : $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$

- أحسب القياس لـ $\hat{A}$ في الحالة $|\psi\rangle = i|e_1\rangle$ و أحسب $\langle A\rangle$

و ΔA

إيجاد القيم الذاتية

$$\left|\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}-\lambda & i\\ -i & -\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2-1=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=+1\\ \lambda_2=-1\end{cases}$$

إيجاد الأشعة الذاتية .

نضع : شعاع ذاتي :

$$|v_1\rangle=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_1=1}$$

$$A\,|v_1\rangle=\lambda_1|v_1\rangle.$$

$$\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases}i\beta_1=\alpha_1\\ -i\alpha_1=\beta_1\end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha_1=i\beta_1}.$$

$|v_1\rangle$: هو شعاع أساسي ومقنن .

$$\langle v_1|v_1\rangle=1$$

$$|v_1\rangle=\begin{pmatrix}i\beta_1\\ \beta_1\end{pmatrix} ;\quad \langle v_1|=\beta_1(-i\ ,1)$$

$$\beta_1(-i,1)\beta_1\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}=1.$$

$$\Rightarrow \beta_1^2(1^2+1)=1$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta_1=\frac{1}{\sqrt2}},\ \frac{1}{-\sqrt2},\ \frac{i}{\sqrt2},\ \frac{-i}{\sqrt2}.$$

ومنه :

$$\alpha_1=i\beta_1$$

إذن مثلا

$$\alpha_1=\frac{i\cdot1}{\sqrt2} \Rightarrow |v_1\rangle=\frac{i}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_2=-1}.$$

نضع شعاع ذاتي :

$$|v_2\rangle=\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}.$$

$$A\,|v_2\rangle=-1\,|v_2\rangle.$$

بنفس الطريقة نجد :

$$\boxed{\beta_2=i\alpha_2}.$$

$|v_2\rangle$ هو شعاع أساسي

نطبق شرط التقنين :

$$\begin{cases}\langle v_2|v_2\rangle=1.\\ |v_2\rangle=\begin{pmatrix}\alpha_2\\ i\alpha_2\end{pmatrix}=\alpha_2\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\end{cases}$$

وبنفس الحل السابق نجد .

$$\alpha_2=\pm\frac{1}{\sqrt2}\ ,\ \pm\frac{i}{\sqrt2}.$$

$$\alpha_2=\frac{1}{\sqrt2} \Rightarrow |v_2\rangle=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}.$$

احتمالية قياس المقدار

$$P(\lambda_1)=P(1)=\sum_{i=1}^{g_n=1}\frac{|C_1^i|^2}{\langle\psi|\psi\rangle}=\frac{|C_1^1|^2}{\langle\psi|\psi\rangle}.$$

$$C_1^1=\langle v_1|\psi\rangle.$$

$$\langle\psi|\psi\rangle=\big(i|e_1\rangle^*,\ i|e_1\rangle\big)=1$$

$$=\big(\langle e_1|(-i)\cdot(i)|e_1\rangle\big)$$

حساب $\langle A\rangle$

$$\begin{cases} \langle A\rangle = \dfrac{\langle \psi | A | \psi\rangle}{\langle \psi|\psi\rangle} \\ |\psi\rangle = i\,|e_1\rangle . \end{cases}$$

$\langle \psi | A | \psi\rangle = ?$. حساب

$$A|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \langle \psi | A | \psi\rangle = \begin{pmatrix} -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle A\rangle = 0}$$

حساب ΔA

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 .$$

$$\langle v_1|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i|e_1\rangle + |e_2\rangle\right)\right)^{\dagger}\cdot\left(i|e_1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle e_1|(-i) + \langle e_2|\right)\left(i|e_1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle e_1|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

باذن نحصل :
بالطريقة أخرى :

$$\langle v_1|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right)^{\dagger}\cdot\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنه

$$P(1) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1} = \frac{1}{2}$$

بنفس الطريقة نجد

$$P(-1) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(1) + P(-1) = 1$$

حساب A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & +i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$\langle A^2\rangle = \langle \psi | A^2 | \psi\rangle .$$

$$A^2|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$\Rightarrow \langle \psi | A^2 | \psi\rangle = \begin{pmatrix} -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = 1 .$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle A^2\rangle = 1} .$$

المسلمة ⑤ تطور الجملة الفيزيائية مع الزمن .

إن تطور الحالة $|\psi(t)\rangle$ في الزمن يوصف بمعادلة شرودينجر

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) \cdot \psi(t).$$

$|\psi\rangle$: شعاع الحالة .

$H(t)$: المؤشر الملاحظ (مشاهد) المرافق للطاقة الكلية :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x).$$

$$[x, P_x] = i\hbar.$$

$$|[x, P_x]|^2 = \hbar^2.$$

المسلمة ⑥ : تكميم المقادير الفيزيائية .

في هذه المسلمة هي :

. يرفق شعاع الموضع التقليدي $\vec{r}(x,y,z)$ بالمؤشر الملاحظ $\vec{R} = (X, Y, Z)$

. " لكمية الحركة $\vec{p}(p_x, p_y, p_z)$ بالمؤشر الملاحظ $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$

إذا كان المقدار الفيزيائي $a(\vec{p}, \vec{r}, t)$ يوصف في الميكانيك الكلاسيكي بدلالة $\vec{r}$ و $\vec{p}$ ففي الميكانيك الكم يوصف بـ $\vec{R}$ و $\vec{P}$.