Applications :

Application n°1 :

Supposons que des consommateurs aient les fonctions d'utilité suivantes :

$U = f(x,y) = X^{1/4} Y^{1/4}$ $\qquad$ $U = f(x,y) = a X \ Y$ $\qquad$ $U = f(x,y) = X^{1/2} Y$

1. Déterminer les utilités marginales que procurent chacun des biens pour ces trois fonctions d'utilités.
2. Déterminer le TMS_{XY} pour chacune de ces fonctions.

Application n°2 :

On considère la fonction d'utilité continue dans le modèle à deux biens : $U = f(x,y) = XY^2$

1. Représentez graphiquement les courbes d'indifférence pour les valeurs 4 et 16 de la fonction d'utilité.
2. Déterminez le TMS_{XY}.

Application n°3 :

Soient deux biens X et Y de prix respectifs Px et Py et R le revenu du consommateur.

1. Ecrivez l'équation de la droite de budget. Représenter la dans un plan orthogonal pour Px = Py = 2 et R = 20.
2. Déterminez la surface des consommations possibles.
3. De combien doit varier R, à prix constants, pour que l'individu puisse consommer 6 unités du bien X et 7 unités du bien Y.

Application n°4 :

Le tableau ci -après donne les points de deux courbes d'indifférence différentes pour un consommateur.

1. Tracer ces courbes I et II sur votre copie.
2. Définir les courbes d'indifférence ?
3. Calculer le TMS xy à tous les points consécutifs des deux courbes d'indifférence.

I		II	
2	13	3	12
3	6	4	8
4	4.5	5	6.3
5	3.5	6	5
6	3	7	4.4
7	2.7	8	4

Exercices :

Exercice 1 :

Soit un consommateur dont les choix sont exprimés à l'aide de la fonction d'utilité ordinale suivante : $U = f(x,y) = 2\ XY$, où X et Y sont les quantités consommées des biens X et Y.

1. Donner l'expression du TMS_{xy} comme rapport des utilités marginales des biens.
2. Donner son expression comme l'opposé de la dérivée de la courbe d'indifférence pour un niveau d'utilité fixé à 100.
3. Calculer les valeurs du TMS_{xy} pour x=20, x=25 et x=50 en utilisant les deux méthodes. Vérifier l'équivalence des résultats.
4. Que signifie un TMS_{xy} de 4 ?
5. Pour un budget de 200 dirhams, Px = 12 dhs et Py = 6dhs, calculer les quantités à consommer à l'équilibre par la méthode du TMS à l'équilibre.
6. Quel est le niveau d'utilité maximal obtenu ?

Exercice 2 :

Dans le cas d'une fonction de satisfaction de la forme: $U = f(x,y) = 4X^2 Y$ et d'une contrainte budgétaire: $100 = 10X+20Y$

1. Déterminez les quantités demandées à l'optimum en utilisant la méthode de Lagrange. Quel est le niveau de l'utilité totale?
2. Quelle est la signification économique du multiplicateur de Lagrange?
3. On admet que le prix des biens sont P(x) = 5 et P(y) = 10. Quel est le revenu nécessaire pour obtenir un maximum de satisfaction sur la même courbe d'indifférence qu'à la question précédente?

karim

Economiste

TD N°1

Application 1

① Déterminer les utilités marginales qui procurent chacun des biens pour ces trois fonctions d'utilités.

ⓐ $U = f(x,y) = X^{1/4} Y^{1/4}$

* $Umx = f(x,y)'_x = (X^{1/4} Y^{1/4})'_x$

$= \frac{1}{4} X^{(\frac{1}{4}-1)} Y^{1/4}$

$Umx = \frac{1}{4} X^{-3/4} Y^{1/4} = \frac{Y^{1/4}}{4X^{3/4}}$

$\boxed{Umx = \frac{Y^{1/4}}{4X^{3/4}}}$

* $Umy = f(x,y)'_y = (X^{1/4}Y^{1/4})'_y$

$= \frac{1}{4} X^{1/4} Y^{(\frac{1}{4}-1)}$

$Umy = \frac{1}{4} X^{1/4} Y^{-3/4} = \frac{X^{1/4}}{4Y^{3/4}}$

$\boxed{Umy = \frac{X^{1/4}}{4Y^{3/4}}}$

ⓑ $U = f(x,y) = aX^{\alpha}Y^{\beta}$

* $Umx = f(x,y)'_x = (aX^{\alpha}Y^{\beta})'_x$

$= \alpha a X^{(\alpha-1)} Y^{\beta}$

$\boxed{Umx = \alpha a X^{(\alpha-1)} Y^{\beta}}$

* $Umy = f(x,y)'_y = (aX^{\alpha}Y^{\beta})'_y$

$= \beta a X^{\alpha} Y^{(\beta-1)}$

$\boxed{Umy = \beta a X^{\alpha} Y^{(\beta-1)}}$

ⓒ $U = f(x,y) = X^{1/2} Y$

* $Umx = f(x,y)'_x = (X^{1/2}Y)'_x$

$= \frac{1}{2} X^{(1/2-1)} Y$

$Umx = \frac{1}{2} X^{-1/2} Y = \frac{Y}{2X^{1/2}}$

$\boxed{Umx = \frac{Y}{2X^{1/2}}}$

* $Umy = f(x,y)'_y = (X^{1/2}Y)'_y$

$= X^{1/2}$

$\boxed{Umy = X^{1/2}}$

② Déterminer le TMS_{xy} pour chaque fonction.

ⓐ pour $U = f(x,y) = X^{1/4}Y^{1/4}$

$TMS_{xy} = \frac{Umx}{Umy} = \frac{\frac{Y^{1/4}}{4X^{3/4}}}{\frac{X^{1/4}}{4Y^{3/4}}}$

$= \frac{4Y^{1/4}Y^{3/4}}{4X^{3/4}X^{1/4}}$

$= \frac{Y}{X}$

$\boxed{TMS_{xy} = \frac{Y}{X}}$

ⓑ pour $U = f(x,y) = aX^{\alpha}Y^{\beta}$

$TMS_{xy} = \frac{Umx}{Umy} = \frac{\alpha a X^{(\alpha-1)} Y^{\beta}}{\beta a X^{\alpha} Y^{\beta-1}}$

On a $\frac{Y^{\beta}}{Y^{(\beta-1)}} = Y^{\beta-(\beta-1)} = Y$

et $\frac{X^{(\alpha-1)}}{X^{\alpha}} = X^{\alpha-1-\alpha} = X^{-1}$

donc $TMS_{xy} = \frac{\alpha a}{\beta a}\frac{Y}{X} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{Y}{X}$

$\boxed{TMS_{xy} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{Y}{X}}$

ⓒ Pour $U = f(x,y) = X^{1/2}Y$

$TMS_{xy} = \frac{Umx}{Umy} = \frac{Y/2X^{1/2}}{X^{1/2}}$

$= \frac{Y}{2X^{1/2}X^{1/2}} = \frac{Y}{2X}$

$\boxed{TMS_{xy} = \frac{Y}{2X}}$

Application N°2

On a la fonction d'utilité $U = f(x,y) = XY^2$

① Pour représenter graphiquement les courbes d'indifférence pour les valeurs $U_0 = 4$ et $U_1 = 16$, il faut déterminer l'équation de la courbe d'indifférence pour chaque niveau d'utilité.

* Pour $U_0 = 4$

On a $U_0 = XY^2$

c-à-d $4 = XY^2$

$Y^2 = \frac{4}{X}$

$Y = \sqrt{\frac{4}{X}}$

donc $\boxed{Y = \frac{2}{\sqrt{X}}}$ est l'équation de la courbe d'indifférence pour $U_0 = 4$

* Pour $U_1 = 16$

On a $U_1 = XY^2$

c-à-d $16 = XY^2$

$$Y^2 = \frac{16}{X}$$

$$Y = \sqrt{\frac{16}{X}}$$

Donc $\boxed{Y = \frac{4}{\sqrt{X}}}$ est l'équation de la courbe d'indifférence pour $U_1 = 16$

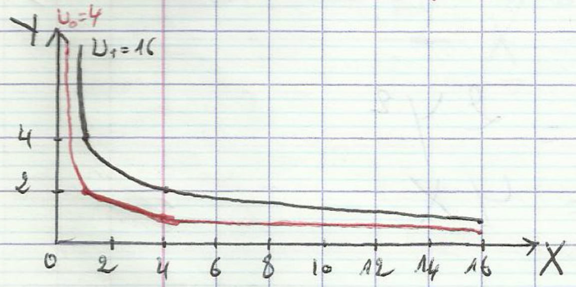
* Représentation Graphique

- Pour $U_0 = 4$

X	1	4	16
Y	2	1	0,5

- Pour $U_1 = 16$

X	1	4	16
Y	4	2	1



② $TMS_{XY} = \frac{Um_X}{Um_Y} = \frac{f(X,Y)'_X}{f(X,Y)'_Y}$

$= \frac{Y^2}{2XY}$

$= \frac{Y}{2X}$

$$\boxed{TMS_{XY} = \frac{Y}{2X}}$$

Application N°3

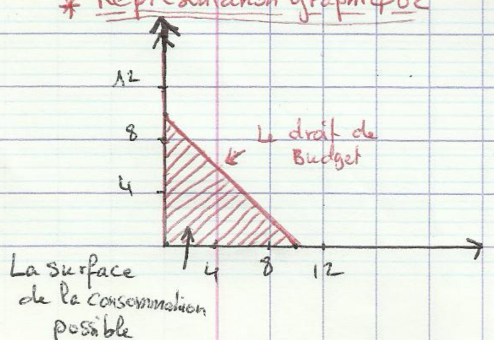
① L'équation de la droit de Budget pour $P_X = P_Y = 2$ et $R = 20$

On a $R = XP_X + YP_Y$

c-à-d $20 = 2X + 2Y$

donc $\boxed{Y = -X + \frac{20}{2}}$ est l'équation de la droit du Budget

* Représentation graphique



② La surface de la consommation possible est les points du droit de Budget et tous les points qui se situent en bas de ce droit

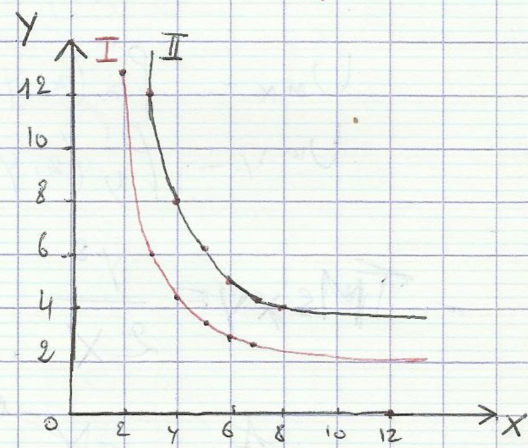
③ Pour que le consommateur puisse consommer 6 unités du Bien X et 7 unité du bien Y il doit dépenser 26 dhs car

$26 = (6 \times 2) + (7 \times 2)$

Donc R doit augmenter de 6 pour que le consommateur puisse consommer 6 unités de X et 7 de Y

Application N°4

① Représentation graphique de I et II



② Le courbe d'indifférence est le courbe qui joient l'ensemble des combinaisons X et Y qui procurent au consommateur le même niveau de satisfaction

③ La Calcul de TMS_{XY}

I			II		
X	Y	TMS_{XY}	X	Y	TMS_{XY}
2	13	-	3	12	-
3	6	7	4	8	4
4	4,5	1,5	5	6,3	1,7
5	3,5	1	6	5	1,3
6	3	0,5	7	4,4	0,6
7	2,7	0,3	8	4	0,4

Exercices

Exercice ①

① L'expression du TMS_{xy} comme rapport des utilités marginales des biens.

On a $U = f(x,y) = 2XY$

$$TMS_{xy} = \frac{U_{mx}}{U_{my}}$$

$* \; U_{mx} = f(x,y)'_x = 2Y$

$* \; U_{my} = f(x,y)'_y = 2X$

$$TMS_{xy} = \frac{2Y}{2X} = \frac{Y}{X}$$

donc $\boxed{TMS_{xy} = \frac{Y}{X}}$

② L'expression du TMS_{xy} comme l'opposé de la dérivée de la courbe d'indifférence pour $U_0 = 100$

→ Détermination de l'équation de la courbe d'indifférence

On a $U_0 = 2XY$

c.à.d $100 = 2XY$

$$Y = \frac{100}{2X} = \frac{50}{X}$$

donc $\boxed{Y = \frac{50}{X}}$ est l'équation de la courbe d'indifférence pour $U_0 = 100$

$$TMS_{xy} = -(Y(x))' = -\left(\frac{50}{X}\right)' = -\left(-\frac{50}{X^2}\right) = \frac{50}{X^2}$$

donc $\boxed{TMS_{xy} = \frac{50}{X^2}}$

③ Les valeurs du TMS_{xy} pour $x = 20$, $x = 25$ et $x = 50$

→ methode ①

X	20	25	50
Y	2,5	2	1
TMS_{xy}	0,125	0,08	0,02

→ methode ②

X	20	25	50
TMS_{xy}	0,125	0,08	0,02

On remarque que les Resultats de TMS_{xy} pour les deux methodes sont les mêmes

④ $TMS_{xy} = 4$; signifie que le consommateur doit abondoner 4 unités de bien Y pour obtenir une unité suplementaire de bien X en gardant le même niveau de satisfaction

⑤ L'équilibre de consommateur pour $R = 200$, $P_x = 12$, $P_y = 6$

Le programme est de maximisation

À l'equilibre on a

$$\begin{cases} TMS_{xy} = \frac{U_{mx}}{U_{my}} = \frac{P_x}{P_y} \\ R = xP_x + yP_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} TMS_{xy} = \frac{Y}{X} = \frac{12}{6} \\ 200 = 12X + 6Y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{Y}{X} = 2 \\ 200 = 12X + 6Y \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = 2X \quad ① \\ 200 = 12X + 6Y \quad ② \end{cases}$$

on remplace ① dans ②

$$200 = 12X + 6(2X)$$
$$200 = 12X + 12X$$
$$200 = 24X$$
$$X^* = \frac{200}{24} = 8,33$$

donc $Y^* = 2 \times 8,33 = 16,66$

donc $E(X^* = 8,33,\ Y^* = 16,66)$

⑥ Le niveau d'utilité maximal

$$U_{max} = 2X^*Y^* = 2 \times 8,33 \times 16,66 = 277,5$$

$\boxed{U_{max} = 277,5}$

Exercice ②

① L'équilibre de consommateur pour $U = f(x,y) = 4X^2Y$, $100 = 10X + 20Y$

Le programme est de maximisation

À l'équilibre la fonction de Lagrange est

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 4X^2Y + \lambda(100 - 10X - 20Y)$$

Condition de 1^{er} ordre

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8XY - 10\lambda = 0 & ① \\ 4X^2 - 20\lambda = 0 & ② \\ 100 - 10X - 20Y = 0 & ③ \end{cases}$$

de ① et ② on a

$$\lambda = \frac{8XY}{10} = \frac{4X^2}{20}$$

$$\frac{8XY}{10} = \frac{4X^2}{20}$$

$$160XY = 40X^2$$

$$Y = \frac{40X^2}{160X}$$

$$Y = \frac{1}{4}X$$

on remplace ceci dans ③

$$100 = 10X + 20\left(\frac{1}{4}X\right)$$

$$100 = 10X + 5X$$

$$100 = 15X$$

$$X^* = \frac{100}{15} = 6{,}67$$

$$Y^* = \frac{1}{4} \times 6{,}67 = 1{,}67$$

donc $E(X^* = 6{,}67,\ Y^* = 1{,}67)$

$$U_{max} = 4 \times (6{,}67)^2 \times 1{,}67 = 297{,}18$$

$$\boxed{U_{max} = 297{,}18}$$

② La signification de le multiplicateur de Lagrange λ

$$\lambda = \frac{4X^2}{20} = \frac{4 \times (6{,}67)^2}{20} = 8{,}89$$

$$\boxed{\lambda = 8{,}89}$$

Le multiplicateur de Lagrange λ est l'utilité marginale de Revenue, c-à-d l'utilité obtenue après la dépense d'une unité suplémentaire de Revenue, $\lambda = 8{,}89$ signifie que lorsque le Revenue augmente de 1dhs l'utilité augmente de $\lambda = 8{,}89$, c-à-d lorsque le Revenue passe de 100 à 101 l'utilité passe de 297,18 à 306,07

③ Détermination de Revenue nécessaire pour obtenir une utilité $U_0 = 297{,}18$ pour $P_x = 5$, $P(y) = 10$

Le Programme est de ~~maxi~~minimisation

La fonction de Lagrange est

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 5X + 10Y + \lambda(297{,}18 - 4X^2Y)$$

Condition de 1^{er} ordre

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{L}'_x = 5 - 8\lambda XY = 0 & ① \\ \mathcal{L}'_y = 10 - 4\lambda X^2 = 0 & ② \\ \mathcal{L}'_\lambda = 297{,}18 - 4X^2Y = 0 & ③ \end{cases}$$

de ① et ② on a

$$\lambda = \frac{5}{8XY} = \frac{10}{4X^2}$$

$$\frac{5}{8XY} = \frac{10}{4X^2}$$

$$\frac{4X^2}{8XY} = \frac{10}{5}$$

$$\frac{4X}{8Y} = 2$$

$$16Y = 4X$$

$$Y = \frac{4}{16}X$$

$$Y = \frac{1}{4}X$$

On remplace ceci dans ③

$$297{,}18 = 4X^2\left(\frac{1}{4}X\right)$$

$$297{,}18 = 4 \times \frac{1}{4}X^3$$

$$297{,}18 = X^3$$

$$X^3 = 297{,}18$$

$$X^* = \sqrt[3]{297{,}18} = 6{,}67$$

$$Y^* = \frac{1}{4} \times 6{,}67 = 1{,}67$$

donc $E(X^* = 6{,}67,\ Y^* = 1{,}67)$

$$R_{min} = (6{,}67 \times 5) + (1{,}67 \times 10)$$

$$R_{min} = 50$$

Donc $\boxed{R_{min} = 50}$