يقتصر استخدام نموذج الانحدار البسيط على العلاقة بين متغير مستقل واحد و المتغير التابع، إلا انه في المجال الاقتصادي يتطلب الأمر في كثير من الأحوال تحليل العلاقة بين أكثر من متغيرين و تغطى مثل هذه التحليلات بواسطة النموذج الخطي العام. علما أن النموذج الخطي العام ماهو إلا امتداد للنموذج الخطي البسيط مما يمكننا من اعتماد نفس الأسس التي اعتمدت في تحليل نموذج الانحدار الخطي البسيط.

و لتبسيط عرض النموذج الخطي العام سنبدأ بالحالة الخاصة له و هي الحالة التي يكون فيها المتغير التابع دالة في متغيرين مستقلين.

النموذج الخطي ذي ثلاث متغيرات: إن التحليل بالانحدار المتعدد يسمح باختيار فرضيات العلاقة القائمة بين متغير تابع و على الأقل بين متغيرين مستقلين. كما يسمح هذا التحليل بالتقدير. و النموذج الخطي لثلاث متغيرات يمكن التعبير عنه بالعلاقة:-

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \mu_i \;/\; (i=1,2\ ,3,\ldots..,n)$$

حيث المعاملات β و كذلك μ مجهولين لدينا و مهمتنا الآن هو الحصول على تقديرات لهذه المجاهيل.

إن مضاعفة المتغيرات المستقلة يقود إلى إضافة فرضية جديدة إلى فرضيات الانحدار البسيط و هي:-

عدم وجود علاقة خطية دقيقة بين (xj) المتغيرات المستقلة (j =1,2, ...K). أي عينات (colinéarité) و لتقدير المعلمات للعلاقة السابقة بواسطة المربعات الصغرى العادية (MCO).

لدينا

$$\Sigma e_i^2 = \Sigma (Y_i - \hat{Y}_1)^2$$
$$= \Sigma (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i})^2$$

و هدف mco هو:

$$\text{Min} : \Sigma(e_i^2 = f(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$$

و منه نشتق:-

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = -2\Sigma(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i}) = 0$$

و منه:-

$$\Sigma Y_i = \eta \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \Sigma X_{2i} + \hat{\beta}_3 \Sigma X_{3i} \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_2} = -2\Sigma\, x_{2i}(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i}) = 0$$

$$\Sigma Y_i\, x_{2i} = \hat{\beta}_1 \Sigma x2i + \hat{\beta}_2 \Sigma X^2_{2i} + \hat{\beta}_3 \Sigma x2iX_{3i} \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_3} = -2\Sigma\, x_{3i}(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i})$$

$$\Sigma X_{3i} Yi = \hat{\beta}_1 \Sigma x_{3i} + \hat{\beta}_2 \Sigma X_{3i} X_{2i} + \beta 3 \Sigma X^2_{3i} \ldots\ldots\ldots(3)$$

1و2و3 تمثل المعادلات الطبيعية للمربعات الصغرى و بتقسيم المعادلة (1) على n نجد:-

$$\bar{Y}=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2\bar{X}_2-\hat{\beta}_3\bar{X}_3$$

ومنه

$$\hat{\beta}_1=\bar{Y}-\hat{\beta}_2\bar{X}_2-\hat{\beta}_3\bar{X}_3$$

و إذا افترضنا أن الانحرافات هي:-

$$X_{2i}-\bar{X}_2=x_{2i}\ ,\ X_{3i}-X_3=x_{3i}$$

$$Y_i-\bar{Y}=y_i$$

فيكون:-

$$\hat{y}_i=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2X_{2i}+\hat{\beta}_3X_{3i}$$

على شكل انحرافات يأخذ الشكل التالي:-

$$\bar{Y}=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2\bar{X}_2+\hat{\beta}_3\bar{X}_3$$

و منه و بطرح الثانية من الأول نجد:-

$$\hat{y}_i-\bar{Y}=\hat{\beta}_2(X_{2i}-\bar{X}_2)+\hat{\beta}_3(X_{3i}-\bar{X}_3)$$

$$\hat{y}i=\hat{\beta}_2\,x_{2i}+\hat{\beta}_3\,x_{3i}$$

و منه:-

$$\begin{aligned}\Sigma e_i^2&=\Sigma(yi-\hat{y})^2=\Sigma(yi-\bar{Y}+\bar{Y}-\hat{y})^2\\&=\Sigma((yi-\bar{Y})-(\hat{y}-\bar{Y}))^2\\&=\Sigma(yi-\hat{y}i)^2\\&=\Sigma(yi-\hat{\beta}_2x_{2i}-\hat{\beta}_3\,x_{3i})^2\end{aligned}$$

و منه:-

$$\Sigma\,e_i^2=f(\hat{\beta}_2\,,\,\hat{\beta}_3)$$

و للحصول على المعادلات الطبيعية للمربعات الصغرى:-

$$\frac{\partial\sum ei^2}{\partial\hat{\beta}_2}=-2\Sigma\,x_{2i}(y_i-\hat{\beta}_2x_{2i}-\hat{\beta}_3x_{3i})=0$$

و منه:-

$$\Sigma Y_ix_{2i}=\hat{\beta}_2\,\Sigma x^2_{2i}+\hat{\beta}_3\Sigma x_{2i}x_{3i}\text{-----------}(1)$$

$$\frac{\partial\sum ei^2}{\partial\hat{\beta}_3}=-2\Sigma\,x_{3i}(y_i-\hat{\beta}_2x_{2i}-\hat{\beta}_3x_{3i})=0$$

و منه:-

$$\Sigma X_{3i}y_i=\hat{\beta}_2\,\Sigma x_{3i}x_{2i}+\hat{\beta}_3\,\Sigma\,x^2_{3i}\text{------------}(2)$$

و تسمى المعادلتين الأخيرتين (1) و (2) بالمعادلات الطبيعية للمربعات الصغرى في شكلها الانحرافي. و بحلها نضرب المعادلة الأول بالمقدار $X\Sigma 32i$ و المعادلة الثانية بـ --------- ثم نطرح الأخيرة من الأول فنجد أن----- تختفي بالطرح.

و منه:-

$$\hat{\beta}_2=\frac{\sum x_{2i}y_i.\sum x^2{}_{3i}-\sum x_{3i}y_i.\sum x_{2i}X_{3i}}{\sum x^2{}_{2i}.\sum x^2{}_{3i}-(\sum x_{2i}x_{3i})^2}$$

و

$$\hat{\beta}_3=\frac{\sum x_{3i}y_i.\sum x^2{}_{2i}-\sum x_{2i}y_i.\sum x_{2i}X_{3i}}{\sum x^2{}_{2i}.\sum x^2{}_{3i}-(\sum x_{2i}x_{3i})^2}$$

أما $\hat{\beta}_1$ فنحصل عليها بالتعويض بقيم $\hat{\beta}_2$ و $\hat{\beta}_3$ في:-

$$\hat{\beta}_1=\bar{Y}-\hat{\beta}_2\bar{X}_2-\hat{\beta}_3\bar{X}_3$$

توسيع النموذج إلى k متغير مستقل:- لقد تناولنا فيما سبق النموذج الخطي ذي متغيرين أما الآن فسنحاول صياغة النموذج الخطي العام ذي k متغير و عليه علينا استخدام الكتابة المصفوفة و كذلك العديد من النتائج في مجال جبر المصفوفات.

لنفرض انه هناك علاقة خطية بين المتغير Y و k-1 من المتغيرات التفسيرية

$X_2,X_3,\ldots\ldots\ldots,X_k$

و حدود اضطراب u في هذه الحالة يمكن كتابة العلاقة بالشكل التالي:-

$$Y=\beta_1+\beta_2X_2+\beta_3X_3+\beta_4X_4+\text{----------}+\beta_\kappa X_\kappa+U$$

حيث المؤشرات الواجب تقديرها هي :-

$\beta_1,\beta_2,\text{----------------}\beta_\kappa$

و إذا كانت لدينا عينة من المشاهدات عددها n حول قيم Y و قيم جميع الـ X.

y_i	X_{2i}	X_{3i}	----------	$.X_{ki}$	
Y_1	X_{21}	X_{31}	---------	$X_{\kappa 1}$	⟶ قيم المشاهدة رقم 1
Y_2	X_{22}	X_{32}	---------	$X_{\kappa 2}$	⟶ قيم المشاهدة رقم 2
⋮	⋮	⋮		⋮	
Y_η	$X_{2\eta}$	$X_{3\eta}$	---------	$X_{k\eta}$	قيم المشاهدة رقم n

و منه يمكننا أن نكتب:-

$$Y_i=\beta_1+\beta_2X_{2i}+\beta_3X_{3i}+\text{---------------}+\beta_\kappa X_{\kappa i}+U_i$$

* حيث المعاملات β(من 1 إلى κ) و مؤشرات توزيع U مجهولة و مسألتنا الآن هي الحصول على تقديرات لهذه المجاهيل.

* إن المعادلات التي عددها n يمكن أن تكتب باستخدام الكتابة المصفوفية بالشكل التالي:-

$$Y=XB+U$$

حيث X: هي مصفوفة المتغيرات المستقلة من البعد(nxk)
قلنا أن x مصفوفة من البعد nxk و ليس من البعد nxk-1 ل.لان B1 مضروب بـ x و هو مساوي للواحد.
و Y: شعاع قيم Y في مشاهدات العينة من البعد (nx1)
و U: شعاع حدود اضطراب بمعنى U_i من البعد(nx1)
و B: شعاع المجاهيل B من البعد(Kx1).
* و لتوضيح ذلك :

$$Y_1=\beta_1+\beta_2X_{21}+\beta_3X\beta_{31}+\text{------------}+\beta_\kappa X_{\kappa 1}+U_1$$
$$Y_2=\beta_1+\beta_2X_{22}+\beta_3X_{32}+\text{------------}+\beta_\kappa X_{\kappa 2}+U_2$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$Y_\eta=\beta_1+\beta_2X_{2\eta}+\beta_3X_{3\eta}+\text{------------}+\beta_\kappa X_{\kappa\eta}+U_\eta$$

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \\ \\ Y_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_{21} & X_{31}\text{------------}X_{\kappa 1} \\ 1 & X_{22} & X_{32}\text{------------}X_{\kappa 2} \\ \\ \\ 1 & X_{2\eta} & X_{3\eta}\text{------------}X_{\kappa\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \\ \\ \beta_\kappa \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \\ \\ Un \end{pmatrix}$$

$$XY_{(\eta x1)}=X_{(\eta x\kappa)} \quad \beta_{(\kappa x1)}+U_{(\eta x1)}$$

- إن الاصطلاح القاضي باستخدام $X_{\kappa i}$ للدلالة على قيمة المتغير $X\ \kappa$ في المشاهدة i يعني أن الدليلين i وk في المصفوفة ^{X} يتبعان عكس الترتيب العادي حيث يشير الدليل الأول عادة إلى السطر و يشير الثاني إلى العمود في المصفوفة.
- تعد الصيغة $Y_{(\eta x1)}= X_{(\eta x\kappa)}\ \beta_{(\kappa x1)}+U_{(\eta x1)}$ هي صيغة النموذج الخطي العام و يكون المشكل الأساسي هو الحصول على مقدار لموجه المعالم غير المعروفة B و عليه يجب إعادة صياغة الفرضيات الأساسية للنموذج السابقة لا تناسب النموذج الخطي العام و هي:

$$\underset{\text{الشعاع}}{\underset{\uparrow}{E(U)}} = \underset{\text{الشعاع}}{\underset{\uparrow}{O}}$$

1- كل ملاحظات شعاع المتغير العشوائي U لها وسط مساو للصفر

-2 $E(U.U')=\sigma^2 I_\eta$

حيث I_η مصفوفة الوحدة.

تكون تباينات الأخطاء العشوائية متجانسة بالنسبة لكل الملاحظات. أما التباينات المشتركة فهي معدومة بالنسبة لكل الملاحظات المختلفة.

3- تكون قيم المتغيرات المستقلة x_{Ji} غير عشوائية أي أن x مصفوفة غير عشوائية كما انه لا توجد أية علاقة خطية صحيحة فيما بين المتغيرات المستقلةX_{JI} أي أن رتبة المصفوفة Xاقل من n أي:-

$$RANK(X)=K\leq n$$

4- تتبع الأخطاء العشوائية قانون التوزيع الطبيعي المتعدد أي:

$$U\sim N(0,\sigma_u^2 In)$$

إن الفرضية الأولى $E(U) = O$: تنص على أن $E(Ui) = O$

$\forall i :1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,n$. أي أن u_i متحولات عشوائية مع التوقع يساوي الصفر منها:

$$E(U)=E\begin{pmatrix}U_1\\U_2\\\vdots\\\vdots\\U_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E(U_1)\\E(U_2)\\\vdots\\\vdots\\E(U_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

أما الفرضية الثانية : $E(U.\grave{U})=\sigma^2.I_n$

لدينا

$$U.\grave{U}=\begin{pmatrix}U_1\\U_2\\\\\\U_n\end{pmatrix}\begin{bmatrix}U_1,U_2,\text{-------}U_n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}U^2{}_1 & U_1U_2\text{----------}U_1U_n\\U_2U_1 & U^2{}_2\text{-------------}U_2U\\\vdots\\\vdots\\U_nU_1 & U_nU_2\text{---------}U^2{}_n\end{pmatrix}$$

$$
\left[E\ U\grave{U}\right] = \begin{pmatrix} E(U^2_1) & E(U^2_1) \text{----------} E(U_1.U_n) \\ E(U_2U_1) & E(U^2_2) \text{----------} E(U^2_2) \\ \vdots & \\ \vdots & \\ \vdots & \\ E(U_nU_1) & E(U_nU_2) \text{---------} E(U^2_n) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \sigma^2_u & 0 \text{-------------} 0 \\ 0 & \sigma^2_u \text{-----------} 0 \\ & \\ 0 & 0 \text{----------} \sigma^2_u \end{pmatrix} = \sigma^2_u \begin{pmatrix} 1 & 0 \text{--------} 0 \\ 0 & 1 \text{--------} 0 \\ & \\ 0 & 0 \text{--------} 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \sigma^2_u I_n
$$

حيث In: مصفوفة أحادية من الدرجة n

*إن عناصر القصر الرئيسي للمصفوفة $E(U.\grave{U})$ تبين أن :-

$E(U^2_i)=\sigma^2_u$ $\forall i$ أي أن المتحولات U_i ذات تباين ثابت σ^2_u و هذه الخاصية هي ما يشار إليه ثابتية التباين Homo scédslicité

* أما العناصر الواقعة خارج القطر الرئيسي فهي أصفار بمعنى أن قيم Ui *مستقلة* مثنى مثنى.

* و تسمى المصفوفة $E(\ U.\grave{U}\ )$ بمصفوفة التباينات و التباينات المشتركة.

<u>تقديرات المربعات الصغرى:-</u> سنحاول الآن ضمن الفرضيات السابقة تطبيق مبدأ المربعات الصغرى و كذلك لتقدير مؤشرات العلاقة : -

$$Y_i=\beta_1+\beta_2X_{2i}+\text{-------}+\beta_kX_{ki}+U_i$$

* و قبل هذا من اللائق أن نمهد لذلك بعرض بعض المبادئ في جبر المصفوفات و نسجل لذلك النتائج التالية:-

- ليكن Xشعاع عمود من البعد $nx1$

$$
Xnx_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
$$

ليكن$x`$ شعاع السطر (منقول الشعاع x) من البعد $1nx$

$$x`_{1xn}=[x_1,x_2,\text{-----}x_n]$$

ان جداء $x`.x$ يكون موجة (عدد جبري)

$$x`x=[x_1,x_2,\text{-------------}x_n]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x^2{}_1+x_2+\text{--------}x^2{}_n$$

و إذا افترضنا A هو شعاع عمود من البعد nx1

$$A_{nx1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

فان:-

$$A`_{1xn}= [a_1,a_2,\text{---------}a_n]$$

و منه:-

$$A`x = [a_1,a_2,\text{---------------}a_u]\begin{pmatrix} x1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_u \end{pmatrix} = a_1x_1+a_2x_2+\text{-----------}+a_ux_u$$

- ليكن x شعاع عمود من البعد nx1

و Aمصفوفة مربعة من الدرجة n و متناظرة حيث $A`=A$

بمعنى $\forall i \ne j$ $\qquad\qquad a_{ij}=a_{ji}$

و هذا يعني عند تحويل الأسطر إلى أعمدة و الأعمدة إلى اسطر فان المصفوفة لا تتغير.

و تبعا لذلك فان المقدار:-

$$x`Ax$$

يدعى بالشكل التربيعي للشعاع x و المصفوفة A هي مصفوفة الشكل التربيعي و الشكل التربيعي هو عبارة عن موجة حيث:-

- جداء شعاع سطر في مصفوفة يعطي شعاع سطر $x`A$
- و جداء مصفوفة في شعاع عمود يكون شعاع عمود. و لا يجوزان نضرب مصفوفة بشعاع سطر.

عملية الاشتقاق في جبر المصفوفات:-

لنعتبر:- $A`X= a_1x_1+a_2x_2+\text{------------}+a_nx_n$

و بأخذ المشتق الجزني لهذا الجداء بالنسبة للموجه xi $n,\text{-----------},1,2$: i ليكون لدينا:-

$$\frac{\partial(A`X)}{\partial X_1} = a_1, \quad \frac{\partial(A`X)}{\partial X_2} = a_2, \quad \vdots \quad \frac{\partial(A`X)}{\partial X_n} = a_n \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

لنعتبر :-

$$X`A= [x_1,x_2,\text{----------------}x_n] \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1x_1 +\text{------------}+a_nx_2$$

$$A`X=[\, a_1,a_2,\text{----------------},a_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =a_1x_1+a_2x_2+\text{--------}+a_nx_n$$

و منه فان :-

$$X`A=A`X=a_1x_1+\text{----------------}+a_nx_n$$

ملاحظة:- لاحظنا أن المشتقات الجزئية هي عبارة عن عناصر الشعاع A و هذا إذا شكلنا n مشتق جزني و رتبناها كالشعاع لتحصل لنا على الشعاع A و عليه يمكننا اعتبار هذه العملية (عملية الاشتقاق) كعملية اشتقاق بالنسبة للشعاع كما يلي:-

و باعتبار $A`X=X`A$

_ منقول جداء مصفوفتين يساوي جداء منقول المصفوفتين بشرط تغيير الترتيب:-

$$(AB)` = B`A`$$

$$(ABC)` = (BC)`A` = C`B`A`$$

عملية اشتقاق الإشكال التربيعية:-

لنعتبر الشكل التربيعي التالي:-

$$X`AX$$

$$X`=[x_1,x_2,\text{-------------},x_n] \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \text{-----------} & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \text{----------} & a_{2n} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \text{----------} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$X`AX= [x_1,x_2 \text{..........} x_n] \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \text{---------} & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \text{---------} & a_{nn} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \text{----------} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x_n \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x^2_1+a_{12}x_1x_2+ \text{-----}+a_{1n}x_nx_1+a_{12}x_1x_2+a_{22}x^2_2+\text{-----}a_{2n}x_nx_2$$
$$+\text{-----}+a_{1n}x_1x_2+\text{-----}+a_{1n}x_1x_n+a_{24}x_2x_4+\text{-----}a_{nn}{}^{xn2}$$
$$= a_{11}x^2_1+2a_{12}x_1x_2+ \text{-----}+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x^2_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{34}x_2x_4$$
$$+\text{-----}+2a_{2n}x_2x_n+2a_{23}x_2x_3+\text{-------}+2a_{2n}x_2x_n+\text{------}+a_{nn}x^2_n$$

و باخذ المشتقات الجزئية بالنسبة لعناصر الشعاع X نحصل على:-

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(X`AX)}{\partial x_1} &= 2\begin{bmatrix}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\text{--------}+a_{1n}x_n) \\ \\ (a_{11}x_1+a_{22}x_2+\text{---------}+a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ (a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\text{---------}+a_{nn}x_n\end{bmatrix} \\
\frac{\partial(X`AX)}{\partial x_2} &= \\
&\vdots \\
\frac{\partial(X`AX)}{\partial x_2} &=
\end{aligned}$$

$$= 2AX$$

الملاحظة: فضلا عن معامل الضرب 2 فان الطرف الأيمن من المعادلات أعلاه يحتوي على عناصر الجداء AX وهذا الجداء يعطي شعاع من البعد (nx1) إذن يمكننا أن نكتب:-

$$\frac{\partial(X`AX)}{\partial X} = 2AX$$

أما إذا اعتبرنا الطرف الأيمن من المعادلات أعلاه كعناصر الجداء X`A الذي هو شعاع سطر من n عنصر إذن يمكننا أن نكتب
و مما سبق توصلنا إلى أن:-

$$\frac{\partial(X`AX)}{\partial X} = 2X`A$$

لان A`=A ص 7

* أما الآن سنحاول ضمن الفرضيات السابقة تطبيق مبدأ المربعات الصغرى و ذلك لتقديرات مؤشرات العلاقة

لدينا:-

$$Y=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2x_{2i}+\text{---------}+\hat{\beta}_kx_{k1}+e_i$$
$$Y_i=\beta_1+\beta_2x_{2i}+\text{---------}+\beta_kx_{ki}+u_i$$
$$Y_1=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2x_{21}+\text{---------}+\hat{\beta}_k+x_{k1}+e_1$$

$$Y_2=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2 x_{22}+\text{---------}+\hat{\beta}_k x_{k2}+e_2$$

$$\vdots$$

$$Y_n=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2 x_{2n}+\text{---------}+\hat{\beta}_k x_{kn}+e_n$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{21}\text{---------}x_{k1} \\ 1 & x_{22}\text{---------}x_{k2} \\ \vdots & \\ \vdots & \\ 1 & x_{2n}\text{---------}x_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

$$Y= \quad X \quad . \quad \hat{\beta} \quad + \quad E$$

كما نستنتج من:-

$$Y_i=\beta_{1+}\beta_2 x_{21}+\text{---------}+\beta_k x_{k1}+u_i$$
$$Y= \quad x\,.\,\beta \quad + \quad U$$

من:-

$$Y= \quad X\hat{\beta}+E$$

يمكن أن نكتب:-

$$\sum e^2_i = E`.E$$

حيث:-

$$E=\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \quad E` = [e_1,e_2,\text{----------}e_n]$$

و منه:-

$$E`E = e^2{}_1+e^2{}_{2,}+\text{---------}+e^2{}_n$$

كما يمكن ان نكتب:-

$$E=Y-X\hat{\beta}$$
$$\sum e^2_i=E`.E=(Y-X\hat{\beta})(Y-X\hat{\beta})$$
$$=(Y`-\hat{\beta}`X`)(Y-X\hat{\beta})$$
$$=Y`Y-\hat{\beta}`X`Y-Y`X\hat{\beta}+\hat{\beta}`X`X\hat{\beta}$$

يتبين مما سبق أن $\beta^{\wedge}X`Y$ عبارة عن منقول $Y`X\beta^{\wedge}$ و إن كل منهما عبارة عن موجه ذو قيمة ثابتة scalaireكما هو الحال إذا كان لدينا موجه لشعاعين عموديين a و b لكل منهما n عنصر فان:-

$$a`b=b`a$$

حيث:-

$$(a`b)`=b`a$$
$$a`b=(a`b)`$$

و منه:-

$$(Y`X\hat{B})=(Y`X\hat{B})`=\hat{B}`X`Y$$

و منه:-

$$E`E=\sum^{n}_{i=1}e_i^2=Y`Y-2\hat{B}`X`Y+\hat{B}`X`X\hat{B}$$

ملاحظة:- و لإيجاد قيمة الشعاع $\hat{B}$ التي تجعل مجموع لبقايا المربعة اصغر ما يمكن فعلينا اشتقاق $E`E$ لـ $\hat{B}$ و جعل المشتق مساويا للصفر.

$$\frac{\partial E`E}{\partial \beta^{\wedge}}=0-2\bar{X}Y+2\bar{X}X\beta^{\wedge}$$

كما هو الحال لـ:-

$$\beta^{\wedge}\bar{X}\underset{\smile}{X}\beta^{\wedge}$$
$$X`AX$$

$$\frac{\partial(X`AX)}{\partial X}=2AX$$

حيث:-

$$AX=X`X\beta^{\wedge}$$

و بجعل المشتق مساويا للشعاع 0 نحصل على ما يلي:-

$$X`X\beta^{\wedge}=X`Y$$

و بضرب طرفي العلاقة في $(X`X)^{-1}$

$$1.\beta^{\wedge}=(X`X)^{-1}.X`Y$$
$$\beta^{\wedge}=(X`X)^{-1}.X`Y$$

*هذه النتيجة تعد أساسيه لتقديرات المربعات الصغرى

تطبيق:- توضيحا لهذه النتيجة لنعتبر حالة المتغيرين الاثنين (حالة الانحدار الخطي البسيط)

$$\beta^{\wedge}=\begin{bmatrix}\hat{a}\\ \beta^{\wedge}\end{bmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix}1 & X_1\\ 1 & X_2\\ \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots\\ 1 & X_n\end{pmatrix} \qquad Y=\begin{pmatrix}Y_1\\ Y_2\\ \vdots\\ \vdots\\ Y_n\end{pmatrix}$$

نطبق العلاقة :- $X`X\beta^{\wedge}=X`Y$

لدينا:-

$$X`X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix}$$

و لدينا:-

$$X`Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum XY \end{bmatrix}$$

و منه:-

$$X`X\hat{\beta} = X`Y$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \end{bmatrix}$$

و هذه النتيجة تنطبق تماما مع النتيجة التي درسناها في المربعات الصغرى

$$n\hat{a} + \hat{\beta}\sum x = \sum y$$

$$\hat{a}\sum x + \hat{\beta}\sum x^2 = \sum xy$$

- حالة ثلاث متغيرات $k=3$

$$Y_{n1} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \qquad \hat{\beta}_{k1} = \hat{\beta}_{31} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix}$$

$$X_{n3}=\begin{pmatrix} 1 & x_{21} & x_{31} \\ 1 & x_{22} & x_{32} \\ \vdots & x_{23} & x_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{2n} & x_{3n} \end{pmatrix}$$

y	x_2	x_3
y_1	x_{21}	x_{31}
y_2	x_{22}	x_{32}
$\vdots$		$\vdots$
$\vdots$		$\vdots$
y_n	x_{2n}	x_{3n}

$$X`(3.n)=\begin{pmatrix} 1 & 1\text{------------}1 \\ x_{21} & x_{22}\text{----------}x_{2n} \\ x_{31} & x_{32}\text{----------}x_{3n} \end{pmatrix}$$

$$(x`_{3n}.x_{n3})_{(3.3)}=\begin{pmatrix} 1 & 1\text{------------}1 \\ x_{21} & x_{22}\text{----------}x_{24} \\ x_{31} & x_{32}\text{----------}x_{3n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_{21} & x_{31} \\ 1 & x_{22} & x_{32} \\ 1 & x_{2n} & x_{3n} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} n & \sum x_2 & \sum x_3 \\ \sum x_2 & \sum x^2_2 & \sum x_2x_3 \\ \sum x_3 & \sum x_3x_2 & \sum x^2_3 \end{pmatrix}_{3.3}$$

$$(\bar{X}_{3n}.Y_{n1})_{3.1}=\begin{pmatrix} 1 & 1\text{-----------}1 \\ x_{21} & x_{22}\text{----------}x_{2n} \\ x_{31} & x_{32}\text{----------}x_{3n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum y \\ \sum x_2y \\ \sum x_2y \\ \\ \sum x_3y \end{pmatrix}$$

و منه:-

$$X`X\beta` = X`Y$$

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_2 & \sum x_3 \\ \sum x_2 & \sum x^2_2 & \sum x_2x_3 \\ \sum x_3 & \sum x_3x_2 & \sum x^2_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta` \\ \beta`_2 \\ \beta`_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum y \\ \sum x_2y \\ \sum x_3y \end{pmatrix}$$

و منه :-

$$\sum y = n\beta`_1 + \beta`_2\sum x_2 + \beta`_3\sum x$$
$$\sum x_2y = \beta`_1\sum x_2 + \beta`_2\sum x^2_2 + \beta`_3\sum x_2x_3$$
$$\sum x_3y = \beta`_1\sum x_3 + \beta`_2\sum x_3x_2 + \beta`_3\sum x^2_3$$

* وهذه المعادلات الطبيعية الثلاثة للمربعات الصغرى و ذلك في حالة ثلاثة متغيرات.
ملاحظة:- في حالة 4 متغيرات بالتالي يصبح يستعمل مقلوب المصفوفة و إعطائها للكمبيوتر لحلها و إعطاء شعاع $\hat{\beta}=(X'X)^{-1}(X'Y)$

تحديد التوقع الرياضي و التباين للشعاع $\hat{\beta}$:-

يجب أن نعتبر هذا الشعاع عشوائيا لأنه يختلف من عينة إلى أخرى.

أولا:- حساب التوقع الرياضي للشعاع $\hat{\beta}$:-

لدينا:- $Y= XB+U$

و لدينا:- $\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y$

بالتعويض بقيمة Y في $\hat{\beta}$ نجد:-

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'(XB+U)$$
$$= (X'X)^{-1}(X'XB+X'U)$$
$$= \underbrace{(X'X)^{-1}(X'X)}_{1}B+(X'X)^{-1}X'U$$
$$= 1.B+(X'X)^{-1}X'U$$
$$\hat{\beta}= B+(X'X)^{-1}X'U$$

لدينا $(X'X)^{-1}{}_{kk}$: عناصر المصفوفة هذه ثوابت لان X ثوابت.

ومنه $(X'X)^{-1}{}_{kk}.X'_{kn}$

و لتكن A_{kn} و هي مصفوفة عناصرها كلها ثوابت:-

و منه :- $\hat{\beta}= B+AU$

$$\begin{pmatrix}\hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \hat{\beta}_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \beta_k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\text{----------} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\text{----------} & a_{2n}\\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{kn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\ U_2\\ \vdots\\ \vdots\\ U_n\end{pmatrix}$$

و نبين فيما يلي إن كل مؤشر تابع لحد الاضطراب و β مجهول

$$\hat{\beta}_1=\beta_1+a_{11}u_1+a_{12}u_2+\text{----------}a_{1n}U_n=\beta_1+\sum a_{1i}u_i$$
$$\hat{\beta}_2=\beta_2+a_{21}u_1+a_{22}u_2+\text{----------}a_{2n}U_n=\beta_2+\sum a_{i2}u^i$$
$$\hat{\beta}_k=\beta_k+a_{k1}u_1+a_{k2}u_2+\text{----------}a_{kn}U_n=\sum a_{ki}u_i$$

إن العلاقة السابقة تعبر عن $\hat{\beta}$ كتابع خطي للقيمة الحقيقية و لكن المجهولة: β و القيم الاضطرابية $(u_1,u_2,\text{-----}u_n)$.

و بأخذ التوقع الرياضي لطرفي العلاقة التالية:-

$$\hat{\beta}=\beta+(x'x)^{-1}x'u$$
$$E(\hat{\beta})=E(\beta)+E[(x'x)^{-1}x'u]$$

$$=\beta+(x'x)^{-1}x'E(u)$$
$$E(\hat{\beta})=\beta$$

لكن $E(u)=0$ بموجب الفرضية.

*و هذه العلاقة الأخيرة تعني أن تقديرات المربعات الصغرى غير متحيزة

$$E(\hat{\beta})=\begin{pmatrix} E(\hat{\beta}_1) \\ E(\hat{\beta}_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ E(\hat{\beta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \beta$$

*و أخيرا نستنتج أن تقديرات المربعات الصغرى غير متحيزة أو بشكل عام أن تقديرات المربعات الصغرى خطية و غير متحيزة.

ثانيا: حساب التباين للشعاع $\hat{\beta}$:-

$$E[(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'] = E\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1-\beta_1 \\ \hat{\beta}_2-\beta_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k-\beta_k \end{pmatrix} [(\hat{\beta}_1-\beta_1),(\hat{\beta}_2-\beta_2)\text{------}(\hat{\beta}_k-\beta_k)]$$

$$= \begin{pmatrix} E(\hat{\beta}_1-\beta_1)^2 & E(\hat{\beta}_1-\beta_1)(\hat{\beta}_2-\beta_2)\text{-------} & E(\hat{\beta}_1-\beta_1)(\hat{\beta}_k-\beta_k) \\ E(\hat{\beta}_1-\beta_1)(\hat{\beta}_2-\beta_2) & E(\hat{\beta}_2-\beta_2)^2\text{-------} & E(\hat{\beta}_k-\beta_k)(\hat{\beta}-\beta_2) \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ E(\hat{\beta}-\beta_1)(\hat{\beta}_k-\beta_k) & E(\hat{\beta}_2-\beta_2)(\hat{\beta}_k-\beta_k)\text{-------} & E(\hat{\beta}_k-\beta_k)^2 \end{pmatrix}$$

نلاحظ من هذه المصفوفة أن

$$E(\hat{\beta}_1-\beta_i)^2=Var(\hat{\beta}_i)$$

و أن

$E[(\hat{\beta}_i-\beta_i)(\hat{\beta}_j-\beta_j)]$ هو التباين المشترك

أي $COV(\hat{\beta}_i-\beta_j) = E[(\hat{\beta}_i-\beta_i)(\hat{\beta}_j-\beta_j)]$

وهكذا فان المصفوفة المتناظرة السابقة تحتوي على تباينات على مدى قطرها الرئيسي و على تباينات مشتركة في كل مكان أخر. وهذه المصفوفة تسمى بمصفوفة التباينات و التباينات المشتركة matrice de variance et de covariance

أو مصفوفة تشتق قيم $\hat{\beta}$ matrice de dispersion و نرمز لها ب :$V(\hat{\beta})$و هو مصفوفة.

لدينا مما سبق:-

$$\hat{\beta}=\beta+(x`x)^{-1}x`u$$
$$\hat{\beta}-\beta=(x`x)^{-1}x`u$$
$$var(\hat{\beta})= E[(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)`]$$

حيث:-

$$(\hat{\beta}-\beta)=(x`x)^{-1}x`u$$
$$(\hat{\beta}-\beta)=u`x(x`x)^{-1}$$

المنقول نفسه باعتبار المصفوفة متناظرة $a_{ij}=a_{ji}$

$$var(\hat{\beta})= (x`x)^{-1}x`E(uu`)\, x(x`x)^{-1}$$
$$E(uu`)=\sigma^2 I_n$$

حيث:-

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\text{-----}0 \\ 0 & 1 & 0 & 0\text{-----}0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\text{-----}1 \end{pmatrix}$$

بما أنه يمكن كتابة ما يلي:-

$$AI_n=I_nA=A$$

فانه يمكن إهمال I_n

$$V(\hat{\beta}) = \sigma^2 (x`x)^{-1}(x`x)\,(x`x)^{-1}$$

لدينا:-

$$(x`x)\,(x`x)^{-1}=I_k$$

حيث:-

$$x_{n.k} \longrightarrow x`_{kn}$$

و منه:-

$$(x`x)_{kk} \longrightarrow (x`x)_{kk}.\,(x`x)^{-1}_{k}= I_k$$

و منه فان مصفوفة الوحدة I_k يمكن إهمالها

و منه:-

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 (x`x)^{-1}$$

و هذه العلاقة كما سبق أن ذكرنا تمثل مصفوفة التباينات و التباينات المشتركة حيث:-

* تباين أي تقدير يساوي جداء σ^2 في العنصر i القطري في المصفوفة $(x`x)^{-1}$ وليكن هذا التقدير $\hat{\beta}_i$.

* التباين المشترك عبارة عن جداء σ^2 في العنصر الواقع في السطر i و العمود j و هو تباين مشترك لـ β_i و β_j فمثلا:-

$$Cov(\beta_1\beta_2)$$

هو تباين مشترك للعنصر في السطر الأول و العمود الثاني بعد ضربه بـ σ^2 .

لقد بينا أن تقديرات المربعات الصغرى هي تقديرات خطية غير متحيزة مع الملاحظة أن خاصية الخطية هنا تشير إلى أن التقديرات هي توابع خطية لقيم y فعلية و يمكن أن نبين أن هذه التقديرات ذات اصغر تباين أي جملة التقديرات الخطية غير متحيزة فان تقديرات المربعات الصغرى هي ذات اصغر تباين أي أن تقديرات المربعات الصغرى هي أفضل التقديرات الخطية غير المتحيزة.

لدينا (في موضوع حسب التوقع لـ $\hat{\beta}$) $\hat{\beta}=(x'x)^{-1}x'y$

اي $(x'x)^{-1}x'$

و لدينا $\hat{\beta}=\beta+AU$

و إذا افترضنا أن بوجه مقدرات آخر هو خطي :-

$$\hat{\hat{\beta}}= (A+C)Y=AY+CY$$

حيث C هي مصفوفة ثوابت.

لكي يكون $\hat{\hat{\beta}}$ مقدر غير متحيز لـ β يجب أن يتحقق الشرط $E(\hat{\hat{\beta}}) = \beta$

$$\hat{\hat{\beta}}=(A+C)Y=AY+CY$$

لكن:-

$$\hat{\beta}=AY=\beta+AU$$

و منه و بالتعويض بـ AY

$$\hat{\hat{\beta}}=\beta+AU+CY$$

لدينا:

$$Y=X\beta+U$$

$$\hat{\hat{\beta}}=\beta+AU+CX\beta+CU$$
$$=\beta+CXB+(A+C)U$$

*لكي يكون $\hat{\beta}$ غير متميز إذا و فقط إذا كان CX=0 كشرط ضروري لذلك و يصبح تعريف

$$\hat{\hat{\beta}}=\beta+(A+C)U$$

ليكون تبيانه $var(\hat{\hat{\beta}})=E[(\hat{\hat{\beta}}-\beta)(\hat{\hat{\beta}}-\beta)']$

لكن $\hat{\hat{\beta}}-\beta=(A+C)U$

و منه $(\hat{\hat{\beta}}-\beta)'=U'(A+C)'$

$$Var(\hat{\hat{\beta}})=E[(A+C)UU'(A+C)']$$
$$=(A+C)\,E(UU')(A+C)'=\sigma_u^2(A+C)(A+C)'$$
$$=\sigma_u^2(A+C)(C'+A')=\sigma_u^2AC'+\sigma_u^2AA'+\sigma_u^2CC'+\sigma_u^2C'A$$

لكن بما أن :- $A=(X'X)^{-1}X'$

$$CA'=CX(X'X)^{-1}=AC'=0$$

و منه:- $var(\hat{\hat{\beta}})=\sigma_u^2(x`x)^{-1}+\sigma_u^2cc`$

حيث: $var(\hat{\beta})= \sigma_u^2(x`x)^{-1}$

و منه:- $var(\hat{\hat{\beta}}) = var(\hat{\beta})+\sigma_u^2cc`$

و منه:- $var(\hat{\hat{\beta}}) - var(\hat{\beta})= \sigma_u^2cc`$

نلاحظ أن المصفوفة `cc هي مصفوفة على الأقل موجبة شبه محددة. و الحالة الوحيدة التي تكون فيها الصيغة التربيعية `cc ومعدومة هي c=0 و منه يكون مقدر المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}$ هو أفضل تقدير خطي غير متحيز أي له خاصية blue لتحقق:-

$$var(\hat{\hat{\beta}})- var(\hat{\beta})= \sigma_u^2cc`\geq 0$$

تقدير تباين حد الاضطراب U:

$$E=Y-X\hat{\beta}$$

لدينا $Y=X\beta+U$

و منه $E= X\beta+U-X\hat{\beta}$

و لدينا $\hat{\beta}=(x`x)^{-1}x`(x\beta +u)$

$$E=x\beta+u-x[(x`x)^{-1}x`(x\beta+u)]$$

$$E=x\beta+u-\underbrace{x(x`x)^{-1}x`}_{\text{مصفوفة أحادية}}x\beta-x(x`x)^{-1}x`u$$

$$E=x\beta+u-x\beta-x(x`x)^{-1}x`u$$

$$E=u-x(x`x)^{-1}x`u$$

$$E=[I_n-x(x`x)^{-1}x`]u$$

و باعتبار:-

$$I_n-x(x`x)^{-1}x`=M$$

حيث M: مصفوفة متناظرة و عقيمة.

$$E=MU$$

M : matrice idempotente

*خصائص مصفوفات متناظرة و عقيمة:

إذا كانت M مصفوفة متناظرة و عقيمة فيكون

لدينا $M= M`$ (و هذا دليل على أنها متناظرة)

$$M^2=M$$

$$\vdots$$

$M^n=M$ (لان $M^2=M$ و منه $M^3=M^2$ و منه $M^n=M^{n-1}----M^4=M^3$)

و هذا يعني أن المصفوفة العقيمة لا تتغير إذا ضربت بنفسها و نستطيع أن نبرهن أن المصفوفة M عقيمة عن طريق ضرب المصفوفة $[I_n=x(x`x)^{-1}x`]$ في نفسها فان النتيجة تعطي المصفوفة نفسها و بالتالي فإنها عقيمة.

إن العلاقة $E=MU$

تعبر عن البقايا المشاهدة (الانحرافات) كتابع خطي لحدود الاضطراب المجهولة.و هكذا فان مجموع البقايا المربعة يكون

$$\sum=e_i^2=E`E=U`M`.MU$$

لكن لدينا

$$M = M'.M = M.M = M^2 = M$$

و منه

$$\sum = e_i^2 = E'E = U'.MU$$

و بأخذ التوقع الرياضي للطرفين

$$E[\sum e_i^2] = \sigma^2 t\tau(m)$$

حيث $t\tau(m)$ تعني اثر المصفوفة M

$T\tau$: trasse

<u>ملاحظة :-</u> حيث اثر المصفوفة هو مجموع عناصر قطرها الرئيسي

لدينا

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

و منه $T\tau = (A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

البرهان صحة

$$E[\sum e_i^2] = \sigma^2 t\tau(m)$$

<u>نظرية</u> إذا كانت لدينا متحولات عشوائية طبيعية U_i

حيث $i = 1,2,3------n$

$$E(u_i) = 0$$
$$E(u_i^2) = \sigma^2$$
$$E(u_i, u_j) = 0 \qquad i \neq j$$

فيمكننا أن نبين

$$E(u'Au) = \sigma^2\, T\tau(A)$$

و بالتالي حققنا

$$E[(\sum e_i^2) = \sigma^2\, T\tau(M) = E(U'M\bar{U})$$

* و ليس شرط أن تكون A عقيمة مثل M.

لدينا:-

$$U'AU$$

$$[U_1, U_2, -------U_n] \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}----------a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}----------a_{2n} \\ \vdots & \\ \vdots & \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2}----------a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}$$

من اجل الحصول على العنصر J من الجداء U`A بضرب مصفوفة السطر `U في العمود J من المصفوفة A.

$$U`A_J \;:\; [u_1,u_2,\text{----------}u_n]\begin{pmatrix} a_{1J} \\ a_{2J} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{nJ} \end{pmatrix}$$

العنصر j من A

b_j=j العنصر $=\sum U_i a_{Ij}$

حيث :-

$$b_j= [b_1,b_2,\text{----------}b_n]\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}$$

$$b_1u_1+b_2u_2+\text{----------}+b_nu_n= \sum b_ju_j$$

و منه:-

$$U`AU= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_i\, u_iu_j$$

$$E(U`AU)=E[\sum_j \sum_i a_{ij}u_iu_j]$$

$$=\sum\sum a_{ij}E(u_i.u_j)=\sum a_{ij}E(u_i)^2$$

لان $E(u_iu_j)=0$ و بالتالي يمكن إهماله

و منه $= \sigma^2\sum a_{ij}=$

حيث $i=j$

$$=\sigma^2 t\tau(A)$$

و منه

$$E [\sum e_i^2] = \sigma^2 t\tau[I_n-x(x`x)^{-1}x`]$$

***ملاحظة:-**

إذا كان A و B مصفوفتين بحيث AB و BA لهما وجود فان اثر AB يساوي اثر BA

أي $t\tau(ba)=t\tau(ab)$

لنفرض أن:-

$$A= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

و منه:- $t\tau(AB)=t\tau(BA)$

* و نستطيع تعميم النتيجة: إذا كانت لدينا 3 مصفوفات A .B.C فان:-

$T\tau(ABC)=t\tau(BCA)=t\tau(CAB)=t\tau(BAC)=$--------

و كذلك لدينا:-

$$T\tau(A-B)=t\tau(A)-t\tau(B)$$
$$T\tau(A+B)=t\tau(A)+t\tau(B)$$

و منه:-

$$E[\sum e_i^2]=\sigma^2 t\tau[I_n-x(x`)^{-1}x`]$$

حيث:-

$$T\tau(I_n)=n$$

بما أن x`x عبارة عن مصفوفة بأبعاد قدرها (kxk) فان:-

$$x(x`x)^{-1}x`=(x`x)^{-1}(x`x)=I_k$$

و منه:-

$$E[\sum e_i^2]=\sigma^2[t\tau(I_n)-t\tau[(x`x)^{-1}(x`x)]$$
$$=\sigma^2[n-t\tau(I_k)]$$
$$=\sigma^2(n-k)$$

و منه:-

$$E[\frac{\sum e_i^2}{n-k}]=\sigma_u{}^2$$

إذن:

$$\sigma^2{}_u=\frac{\sum e_i^2}{n-k}$$

أي أن σ^2_u هو تقدير غير متحيز لـ σ^2_u
في حالة نموذج له متغير k حيث حالة متغيرين $k=2$ فانه كما سبق:

$$\sigma^2_u=\frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

فعالية التوفيق و معامل التحديد:

لدينا:-

$$y=Y-\bar{Y}$$
$$y^2=(Y-\bar{Y})^2$$
$$\sum y^2=\sum(Y-\bar{Y})^2=\sum(Y^2-2\bar{Y}Y+\bar{Y}^2)$$
$$=\sum Y^2-2n\bar{Y}+n\bar{Y}^2$$
$$=\sum Y^2-n\bar{Y}^2$$
$$\sum y^2=\sum Y^2-\frac{1}{n}(\sum Y)^2$$

حيث:

$$Y=\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \quad , \qquad Y`=[Y_1,Y_2,\text{----------}Y_n]$$

$$Y`Y=[Y_1,Y_2,\text{----------}Y_n]\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}=Y^2_1+Y^2_2+\text{----}Y^2_n=\sum Y^2$$

و منه:-

$$\sum Y^2= Y`Y$$

و منه و بالتعويض في $\sum Y^2$

$$\sum Y^2= Y`Y-\frac{1}{n}(\sum Y)^2$$

- هذه العبارة تمثل التباين الإجمالي

و يمكن حساب التباين المفسر.

$$\sum\hat{y}^2=\sum y^2-E`E$$

و بالتعويض عن $\sum Y^2$ بـ $Y`Y-\frac{1}{n}(\sum Y)^2$ في $\sum \hat{y}^2$

نجد:

$$\sum \hat{y}^2= Y`Y-\frac{1}{n}(\sum Y)^2 -E`E$$

لكن:

$$E`E=(Y`-\hat{B}`X`)(Y-X\hat{B})$$
$$=Y`Y-Y`X\hat{B}-\hat{B}`X`Y+\hat{B}`X`X\hat{B}$$

لكن لدينا:

$$\hat{B}=(x`x)^{-1}x`y$$

بضرب الطرفين بـ $x`x$

$$X`X.\hat{B}=(X`X)\ (X`X)^{-1}X`Y$$
$$X`X.\hat{B}= X`Y$$

بضرب الطرفين بـ $\hat{B}`$

$$\hat{B}\ X`X.\hat{B}= \hat{B}`X`Y$$

و منه و بالتعويض في $E`E$ نجد:

$$E`E= Y`Y-Y`X\hat{B}-\cancel{\hat{B}`X`Y}+\cancel{\hat{B}`X`Y}$$
$$= Y`Y-Y`X\hat{B}$$

لكن لدينا $(Y`X\hat{B})`=\hat{B}`X`Y$ لان كلا منهما عبارة عن موجه ص 12خ

و منه:

$$E`E= Y`Y- \hat{B}`X`Y$$
$$Y`Y- E`E= \hat{B}`X`Y$$

حيث:

$$\sum \hat{y}^2= Y`Y-\frac{1}{n}(\sum Y)^2 -E`E$$

و منه و بالتعويض عن $Y`Y- E`E$ نجد:

$$\sum \hat{y}^2= \hat{B}`X`Y -\frac{1}{n}(\sum Y)^2$$

التباين المفسر sce

$$\sum \hat{y}^2= \hat{B}`X`Y-n\bar{Y}^2$$

التباين الكلي: sct

$$\sum y^2= Y`Y- n\bar{Y}^2$$

التباين المتبقي: scr

$$\sum e_i^2= E`E$$

و منه: $R^2 1.23\text{---------}k=\frac{\text{التباين المفسر}}{\text{التباين الاجمالي}}$

$$R^2 1.23\text{------}k=\frac{sce}{sct}$$

أو:

$$R^2 1.23\text{------}k=\frac{sct-scr}{sct}$$

$$R^2 1.23\text{-------}k= 1-\frac{scr}{sct}$$

* و هذا يعني ان هذه النسبة بعد جذرها التربيعي هي معامل الارتباط المتعدد بين المتغير y و المتغيرات التفسيرية $x_1,x_2,\text{--------}x_k$.

و معامل الارتباط المتعدد: هو المقياس الذي يقيس شدة العلاقة الإجمالية بين y والمتغيرات التفسيرية في هذه الحالة إذا استطعنا أن نقيس العلاقة بينy و كل متغير تفسيري على حدى يسمى بمعامل ارتباط جزئي و التي عددها (k-1)

ملاحظة: نلخص مما سبق إلى انه كلما أضفنا متغيرات مستقلة لنموذج الانحدار كلما ارتفعت R^2 بفعل ارتفاع قيمة مجموع مربعات الانحرافات المفسر $sce= \sum \hat{y}^2$

$$R^2=\frac{\sum \hat{y}^2}{\sum y^2}$$

بينما تنخفض قيمة $(scr=\sum e_i^2)$. و تبعا لذلك و كما يمكن إضافة متغيرات مستقلة للنموذج لا يمكن أن تقلل من قيمة R^2 بل عادة ما تزداد هذه القيمة. و لتصحيح ذلك نعدل R^2 اخذين في الاعتبار درجات الحرية (و التي يقل عددها بإضافة متغيرات مستقلة جديدة للنموذج الأصلي).فإذا كان:

$$R^2_{1.2.3.\text{—}K}=1-\frac{\sum e_i^2}{\sum y^2}$$

$$R^2_{1.2.3.\text{—}K}=1-\frac{\sum y^2-\sum e_i^2}{\sum y^2}$$

و منه نرمز لـR^2 بعد الأخذ بعين الاعتبار لدرجات الحرية لـ $\bar{R}^2_{1.2.3.\text{----}k}$:

$$\bar{R}^2_{1.2.3.\text{----}k}=\frac{\frac{\sum y^e}{n-1}-\frac{\sum e_i^2}{n-k}}{\frac{\sum y^2}{n-1}}$$

و منه:

$$1-\bar{R}^2_{1.2.3.\text{----}k}=\frac{\sum e_i^2/n-k}{\sum y^2/n-1}$$

$$1-\bar{R}^2_{1.2.3.\text{----}k}=\frac{\sum e_i^2}{\sum y^2}\cdot\frac{(n-1)}{(n-k)} \Rightarrow \bar{R}^2=1-\frac{\sum e_i^2}{\sum y^2}\cdot\frac{(n-1)}{(n-k)}$$

$$1-\bar{R}^2_{1.2.3.\text{----}k}=(1-R^2_{1.2.3.\text{----}k})\frac{(n-1)}{n-k}$$

$$\bar{R}^2_{1.2.3.\text{----}k}=(1-R^2)\frac{n-1}{n-k}$$

$$\bar{R}^2_{1.2.3.----k} = \frac{1-k}{n-k} + \frac{(n-1)}{(n-k)} R^2 1.2.3.----k$$

ملاحظات:-

*عندما $k=1$ <= $\bar{R}^2 = R^2$

* عندما $k>1$ <= $\frac{n-1}{n-k} > 1$ <= $R^2 > \bar{R}^2$

* عندما تكون n كبيرة بالنسبة لـ k فان $\frac{n-1}{n-k}$ تقترب من الواحد و بالتالي فان R^2 لديهم قيم متقاربة.

* عندما n صغيرة و k كبيرة بالنسبة لـ n فان $\bar{R}^2$ تكون صغيرة جدا بالنسبة لـ R^2 و يمكن أن تكون سالبة. في حين $0 \leq R^2 \leq 2$

ملاحظة: يمكن حساب R^2 في حالتين متغيرتين مثلا من العلاقة:

$$R^2 = \frac{\Sigma \hat{y}^2}{\Sigma y^2} = \frac{\beta_1 \Sigma y x_i + \beta_2 \Sigma y x_2}{\Sigma y^2}$$

اختبارات الدلالة و مجالات الثقة :

أولا: اختبارات الدلالة للمعلمات المقدرة للمربعات بالمربعات الصغرى :

بإدخال قانون التوزيع الطبيعي المتعدد و الموجود بالفرضية الرابعة للنموذج الخطي العام. نقول نظرا إلى أن موجه مقدرات المربعات الصغرى$\hat{B}$ هو دالة خطية لموجه الأخطاء العشوائية، فان هذا المقدر له صفة المتغير العشوائي و يتبع كذلك قانون التوزيع الطبيعي المتعدد حيث:-

$$\hat{B}=B+AU$$

و منه $$\hat{B} \longrightarrow N(B,\sigma^2(X`X)^{-1}$$

- إذن نستنتج أن أي تقدير لـ $B_i(\hat{B}_i)$ هو تابع خطي لـ U_i وB_i أي أن $\hat{B}_i$ ذو توزيع طبيعي مع وسط B_i و تباين المجهول $a_{ii}\sigma^2_u$ أي:

تتوقف على i في $\hat{B}_i$ مثلا $\hat{B}_3$ يقابله a_{33}

$$\hat{B}_i \longrightarrow N(B_{i,}a_{ii}\sigma^2_u)$$

حيث a_{ii} هو العنصر i في قطر المصفوفة $(X`X)^{-1}$.

و نشكل المصفوفة $(X`X)^{-1}$ من بيانات العينة كما يلي:-

$$(X`X)^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\text{----------}a_{1k} \\ a_{21} & a_{22}\text{----------}a_{2k} \\ \vdots & \\ \vdots & \\ a_{k1} & a_{k2}\text{----------}a_{kk} \end{pmatrix}$$

و منه:

$$\hat{B}_k \longrightarrow N(B_{k,}a_{kk}\sigma^2_u)$$

- نلاحظ انه لو كان σ^2 معروفا لدينا لكان بإمكاننا إجراء اختبارات الدلالة و مجالات الثقة و عليه علينا أن نجري خطورة أخرى.لقد بينا أن مجموع المتبقي من المربعات $E`E$ إنما هو شكل تربيعي للشعاع U أي $U`AU$ حيث Aمصفوفة متناظرة و عقيمة.

$$E`E= U`AU= U`[ I_n-x(x`x)^{-1}x`]U$$

كما بينا أيضا أن المصفوفة A متناظرة و عقيمة و أن أثرها يساوي $T\tau(A)=n-k$. و هذا فان رتبة A هي n-k .

و يمكننا الآن إيجاد مصفوفة متعامدة و لتكن P بحيث:

$$P`AP=E_{n-k}$$

حيث المصفوفة E_{n-k} هي مصفوفة قطرية جميع العناصر صفرية ماعدا عناصر القطر الرئيسي منها: n-k عنصر واحد وk عنصر صفر في قطرها الرئيسي.

$$E_{n-k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \text{---------} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \text{---------} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n\text{-}k & \\ 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \text{---} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \; k \\ 0 & 0 & 0 & \text{----------} & 0 \end{pmatrix}$$

علما أن المصفوفة المتعامدة p يمكن أن تستخدم أيضا لتعريف التحويل من الشعاع U الى الشعاع V ($V \longrightarrow U$) أي الشعاع:

$$U=PV \longrightarrow V=P^{-1}U$$

و منه:

$$V=P`U$$

و ذلك لان مقلوب المصفوفة P هو منقول هذه المصفوفة $P^{-1}= P`$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

و بالتعويض في:-

$$E`E= U`AU$$

حيث:

$$U=PV \quad , \quad U`=V`P`$$

$$E`E=V`P`APV$$

و حيث

$$P`AP=E_{n-k}$$

$$E`E=V`\, E_{n-k}.\, V \qquad\qquad E_{n-k} \qquad\qquad V$$

$$\begin{array}{c} V` \\ \hline [v_1,v_2\text{-----}v_k] \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \text{----------} & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \text{----------} & & 0 \\ \vdots & & & & & \\ & & & n\text{-}k & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \text{--}0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{--}0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{-------} & 0 \; k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$$

و منه:

$$E`E= v^2{}_1+v^2{}_2+\text{----------}+v^2{}_{n-k}$$

- بالاستناد إلى المتحولات العشوائية v_i هي أيضا موزعة توزيعا طبيعيا مع وسط صفر و تباين ثابت σ^2 . و توضح ذلك فيما يلي:-

لدينا: $U=PV$

$V=P`U$

العلاقة بين V و U علاقة خطية. و بالتالي فان توزيع V هو من توزيع U حيث الأخير موزع توزيع صنفي:

$$E(V)=E(P`U)= P`E(U)=0$$

$$Var(V)=E(V.V`)= E(P`UU`P)$$

$$= P`E(UU`)P$$

$$= P`\sigma^2_u P$$

$$= \sigma^2_u$$

لان: $P`P=I$

و منه:

$$\frac{V_i}{\sigma_u} \sim N(0,1)$$

$$\frac{v_1^2+v_2^2+---v_{n-k}^2}{\sigma_u^2} \sim Y^2_{(n-k)}$$

أي

$$\frac{V_i}{\sigma_u} \sim N(0,1)$$

$$\sum_{i=1}^{n-k} \frac{v_i^2}{\sigma_u^2} \sim Y^2_{n-k}$$

لكن:

$$\sum e_i^2 = E`E= v^2_1+v^2_2+----------+v^2_{n-k}$$

و منه:

$$\frac{\Sigma e_i^2}{\sigma_u^2} = \frac{E`E}{\sigma_u^2} = \frac{v_1^2+v_2^2+---v_{n-k}^2}{\sigma_u^2} \sim Y^2_{(n-k)}$$

بالإضافة إلى ذلك تحصلنا على:

$$\hat{\beta}_i \sim N(\beta_i, a_{ii}\sigma^2_u)$$

$$\frac{\hat{\beta}_1-\beta_i}{\sigma\sqrt{a_{ii}}} \sim N(0,1)$$

بالرجوع إلى توزيع استيودنت نجد:-

$$t=\frac{\beta_i-\beta_i}{\sigma\sqrt{a_{ii}}} \Big/ \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{\sigma^2_{u(n-k)}}}$$

و منه:

$$t=\frac{\beta_i-\beta_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} e_i^2/n-k}\sqrt{a_{ii}}}$$

هذه العبارة ذات توزيع استيودنت tبدرجات حرية $n-k$ حيث a_{ii} هو العنصر i القطري في المصفوفة $(x`x)^{-1}$.

في حالة اختبار الفرضية: $H_0 : B_2 = X$

$$t=\frac{\beta 2-x}{\sqrt{\sum e_i^2/n-k}\sqrt{a_{22}}}$$

ولاختبار أية فرضية معينة حول B_i فإننا نعوض القيمة الفرضية لـ B_i في عبارة t. و إذا كانت القيمة الناتجة t اصغر أو اكبر من القيمة النظرية فان الفرضية موضوع الاختبار مقبولة (أو مرفوضة) مثلا لاختبار الفرضية التالية:

- $H_0 : B_i = 0$

أي الفرضية القائلة بأنه ليس لـ x_i أي تأثير خطي على y فإننا تبعا لذلك نحسب التابع الاختباري التالي:

$$t=\frac{\beta i}{\sqrt{\sum e_i^2/n-k}\sqrt{a_{ii}}}$$

* في حالة فرضية اللاعلاقة B_2 مثلا فان قبول الفرضية يعني سوف اخرج المتغير التفسيري X_2 من المجموعة لأنه لا يمارس تأثير خطي على Y.

و هكذا دواليك لغيره من المتغيرات التفسيرية.

<u>**ملاحظة:**</u> كما يمكن اعتماد في اختيار الدلالة للمعلمات المقدرة بالمربعات الصغرى على استخدام مجال الثقة.

$100(1-a)\%$ من اجل B_i بتطبيق العلاقة الآتية:

$$\beta_i \pm t_{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-k}}\sqrt{a_{ii}}$$

لدينا مما سبق في الانحدار البسيط:

$$F=\frac{r^2/1}{(1-r^2)/n-2}$$

و منه في الانحدار المتعدد:

$$\frac{\sum \hat{y}^2/k-1}{\sum e_i^2/n-k}=\frac{\sum \hat{y}^2}{\sum e_i^2}\,\frac{n-k}{k-1}$$

$$=\frac{\sum \hat{y}^2/\sum y^2}{\sum e_i^2/\sum y^2}\,\frac{n-k}{k-1}=\frac{R^2}{1-R^2}\,\frac{n-k}{k-1}$$