Chapitre 2

Résolution d'un système d'équations non linéaires

Un problème mathématique qu'on rencontre assez souvent est la résolution d'un système d'équations non linéaires c'est-à-dire :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, ...x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, ...x_n) = 0 \\ \quad\quad .... \\ f_n(x_1, x_2, x_3, ...x_n) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Les fonctions $f_1, f_2, ..., f_n$ sont supposées continues par rapport à l'ensemble des variables $x_1, x_2, ..., x_n$ et partiellement dérivables jusqu'à l'ordre désiré.

Le système 2.1s'écrit sous forme abrégée

$$F(X) = 0 \tag{2.2}$$

avec $F = (f_1, f_2, ..., f_n)$ et $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$

2.1 Méthode de Newton-Raphson

Dans le cas d'une équation $f(x) = 0$, l'algorithme de Newton-Raphson est obtenu à partir du developpement

$$0 = f(x_{p+1}) = f(x_p) + f'(x_p)(x_{p+1} - x_p) + ...$$

Dans le cas du système d'équations $F(X) = 0$ écrivons de même :

$$0 = F(X^{(p+1)}) = f(X^{(p)}) + J(X^{(p)})(X^{(p+1)} - X^{(p)}) + ..$$

Si le jacobien J, déterminant de la matrice $J(X^{(p)})$, est différent de 0. nous obtenons l'algorithme de Newton

$$X^{(p+1)} = X^{(p)} - J^{-1}(X^{(p)})f(X^{(p)}) \text{ avec } J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X) & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X) & . & . & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n1}}(X) \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(X) & . & . & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(X) \end{bmatrix}$$

Algorithme

Pour approcher la solution d'un sysème nonlinear $F(X) = 0$,étant donné une une approximation initiale X :

entrée n le nombre des équations et inconnues ; approximation initiale $X = (x_{1,...,}x_n)^t$, TOL tolerance ; N le nombre maximum d'iterations .

Sortie solution approchée $x = (x_1, ..., x_n)^t$ou une message que le nombre maximum des itérations est dépassé.

1. poser $k = 1$.
2. Tant que $(k \leq N)$ faire étapes $3 - 7$.
3. Calculer $F(X)$ et $J(X)$, où $J(X) = (\frac{\partial fi}{\partial xj}(X))$ for $1 \leq i, j \leq n$.
4. Résoudre le système linéaire $n \times n$; $J(X)Y = -F(X)$.

5. poser $X = X + Y$.

6. Si ||Y|| < TOL Alors écrire (X) ; (The procedure was successful.)

STOP.

7. poser k = k + 1.

8. Sortie (' le nombre maximum des itérations est dépassé') ;

STOP

Remarques

1. Du point de vue pratique, l'agorithme sera utilisé sous la forme : $J(X^{(p)})(\Delta X^{(p)}) = -\ f(X^{(p)})$. La résolution de ce système linéaire peut alors se faire sans utiliser la matrice inverse $J^{-1}(X^{(p)})$ et elle fournit les corrections $\Delta X^{(0)}, \Delta X^{(1)}, ...,$ d'où les points $X^{(1)} = X^{(0)} + \Delta X^{(0)}, X^{(2)} = X^{(1)} + \Delta X^{(1)}$, par exemple la résolution du système $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ xy + x - 1 = 0 \end{cases}$ utilisera l'algoritme de Newton sous la forme :
$$\begin{cases} 2x_n\Delta x_n + 2y_n\Delta y_n = -(x_n^2 + y_n^2 - 1) \\ (y_n + 1)\Delta x_n + x_n\Delta y_n = -(x_n y_n + x_n - 1) \end{cases}$$
2. L'algorithme est d'ordre 2

2.2 Méthode du point fixe

On s'interesse toujours à la résolution du sysème 2.1 qui peut se mettre sous la forme 2.2 c-a-d $F(X) = 0$, avec $F = (f_1,\ f_2, .., \ f_n)$ une fonction continue sur $G \subset E_n$. L'objectif est de faire la résolution à l'aide d'une suite. Pour cela, on l'écrit sous une forme équivalente $F(X) = X$ et l'on introduit une suite récurrente $X^{(n+1)} = F(X^{(n)})$ à partir d'un point quelconque $X^{(0)}$ de G.

Supposons que F est définie différentiable sur G, vérifiant $\|F(X) - F(Y)\| \leq q\,\|X - Y\|$ (contractante) et en outre que toutes les valeurs $F(X)$ appartient à G

1. Démontrer que s'il existe q vérifiant $\|J\,(F\,(X))\| \leq q < 1 \quad \forall X \in G$, alors $\left(X^{(n)}\right)$ converge quelque soit le choix de $X^{(0)}$ et que sa limite est la racine unique de $F\,(X) = X$ sur G.
2. Démontrer linégalité : $\left\|\alpha - X^{(n)}\right\| \leq \left(\frac{q^n}{1-q}\right)\left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|$, α est la racine, que signifie cette inégalité.(vérifier que $\left(X^{(n)}\right)$ est une suite de cauchy dans E_n, en utilisant le théorème de de Lagrange), donc convergente
3. Expliquer géométriquement cette méthode pour $n = 2$.

4. Ecrire l'algorithme correspondant.

Exercices

Exercice 1

On considère le système non-linéaire $\begin{cases} ye^x - 2 = 0 \\ y + x^2 - 4 = 0 \end{cases}$

1. Faire une itération de la méthode de Newton en partant de l'approximation initiale $(x_0, y_0) = (0, 1)$
2. Est-il possible de prendre l'approximation initiale $(x_0, y_0) = (1, 2)$?
3. Déterminer et identifier graphiquement la position des approximations initiales (x_0, y_0) pour lesquelles la méthode de Newton ne fonctionne pas.

Exercice 2

Resoudre par la méthode du point fixe le système, en partant de $(x_0, y_0) = (3,5,2,2)$

$$\begin{cases} g_1(x, y) = 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0 \\ g_2(x, y) = x + 3 \lg x - y^2 = 0 \end{cases}$$

pour pouvoir appliquer la méthode du point fixe, mettons le système sous la forme

$x = \sqrt{\frac{x(x+5)-1}{2}} = f_1(x, y)$

$y = \sqrt{x + 3 \lg x} = f_2(x, y)$

$(\sqrt{\frac{x(x+5)-1}{2}}, \sqrt{x + 3 \log x})$