Faculté des Sciences exactes, des Sciences de la nature et de la vie
Département: de Mathématiques
Module: Intro. Proc. Stocha. 2019/2020

Solution Serie N^{0}03

Exercice 01.

Quels que soient $n \in \mathbb{N}, 0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$ et $i_1, ..., i_n \in E$ on a

$$P\{X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, ..., X_{t_1} = i_1\} = \frac{P\{X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = i_n - i_{n-1}, ..., X_{t_1} - X_{t_0} = i_1 - i_0\}}{P\left\{X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}} = i_{n-1} - i_{n-2}, ..., X_{t_1} - X_{t_0} = i_1 - i_0\right\}},$$

$$\begin{aligned} P\{X_{t_n} - X_{t_{n-1}} &= i_n - i_{n-1}\} = \frac{P\{X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = i_n - i_{n-1}, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\}}{P\{X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\}} \\ &= \frac{P\{X_{t_n} = i_n, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\}}{P\{X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\}} \\ &= P\{X_{t_n} = i_n \left| X_{t_{n-1}} = i_{n-1} \right.\} \end{aligned}$$

Exercice 02.

1) L'espace d'états est $E = \{1, 2, ..., m\}$.

2) On dit que l'on a une chaine de Markov a espace d'états finis E, contenant deux états absorbants $\{1\}$ et $\{m\}$ et tous les autres états transitoires. Dans ce cas la matrice de transitions est d'ordre m et est donnée par la formule

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 03.

1) Pour $k = 1$ cette affirmation est triviale, puisque la matrice $P = P^{(1)}$ elle-même est stochastique. Supposons que l'affirmation est déja prouvée pour le cas $k - 1$ $(k \geq 2)$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(k)} &= P\{X_{k+u} = j | X_u = i\}, \\ &= \frac{P\{X_{k+u} = j, X_u = i\}}{P\{X_u = i\}}, \\ &= \frac{\sum\limits_{r=1}^{m} P\{X_{k+u} = j, X_{u+1} = r, X_u = i\}}{P\{X_u = i\}}, \\ &= \frac{1}{P\{X_u = i\}} \sum_{r=1}^{m} P\{X_{k+u} = j \left| X_{u+1} = r, X_u = i \right.\} P\{X_{u+1} = r, X_u = i\}, \\ &= \frac{1}{P\{X_u = i\}} \sum_{r=1}^{m} P\{X_{k+u} = j \left| X_{u+1} = r \right.\} P\{X_{u+1} = r \left| X_u = i \right.\} P\left\{X_u = i\right\}, \\ &= \sum_{r=1}^{m} P\{X_{k+u} = j \left| X_{u+1} = r \right.\} P\{X_{u+1} = r \left| X_u = i \right.\}, \end{aligned}$$

$$\sum_{r=1}^{m} p_{rj}^{(k-1)} p_{ir} = \sum_{r=1}^{m} p_{ir} p_{rj}^{(k-1)},$$

alors

$$P^{(k)} = \left\| p_{ij}^{(k)} \right\| = P^{(k-1)}P = PP^{(k-1)} = P^2P^{(k-2)} = ... = P^k.$$

2) Supposons que l'espace d'états $E = \{1, 2\}$. Dans ce cas

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ si } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

P^2 est la même pour deux P differentes. Mais si $\pi = (1/3, 2/3)^T$,

$$\pi^{(3)} = \pi^T P^{(2)} P = (1/3, 2/3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1/3, 2/3), \text{ si } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$\pi^{(3)} = \pi^T P^{(2)} P = (1/3, 2/3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (2/3, 1/3), \text{ si } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La probabilité a être dans l'état 1 après trois pas est égale a 1/3 pour le premier cas et a 2/3 pour le deuxième. On a obtenu deux chaines de Markov différentes, ayant les mêmes P^2.

Exercice 04.

On peut, par exemple démontrer cette formule par récurrence. Soit $n = 1$. Dans ce cas on a

$$\frac{1}{a+b}\left\{ \left\| \begin{matrix} b & a \\ b & a \end{matrix} \right\| + (1-a-b) \left\| \begin{matrix} a & -a \\ -b & b \end{matrix} \right\| \right\} = \left\| \begin{matrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{matrix} \right\|.$$

En supposant que la formule soit vraie, on en tire que

$$\begin{aligned} P^{n+1} &= P^n P, \\ &= \frac{1}{a+b}\left\{ \left\| \begin{matrix} b & a \\ b & a \end{matrix} \right\| + (1-a-b)^n \left\| \begin{matrix} a & -a \\ -b & b \end{matrix} \right\| \right\} \left\| \begin{matrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{matrix} \right\|, \\ &= \frac{1}{a+b}\left\{ \left\| \begin{matrix} b & a \\ b & a \end{matrix} \right\| + (1-a-b)^{n+1} \left\| \begin{matrix} a & -a \\ -b & b \end{matrix} \right\| \right\}. \end{aligned}$$

Et donc la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Si $0 < a + b < 2$, alors

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \frac{1}{a+b} \left\| \begin{matrix} b & a \\ b & a \end{matrix} \right\|.$$

Si $a + b = 0$, dans ce cas $P = I_2$ et $P^n = I_2$. Si $a + b = 2$, dans ce cas

$$P = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|, \; P^n = 0.5 \left\{ \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| + (-1)^n \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix} \right\| \right\},$$

d'ou on tire que $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ n'existe pas.

Exercice 05.

Les intensités de transition sont

$$\begin{aligned} \lambda_{01} &= \lim_{h\to 0} \frac{p_{01}(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - e^{-\alpha h}}{h} = \alpha, \\ \lambda_{10} &= \lim_{h\to 0} \frac{p_{10}(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - e^{-\beta h}}{h} = \beta. \end{aligned}$$

La matrice des intensités infinitésimales est

$$\begin{pmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{01} \\ \lambda_{10} & \lambda_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix},$$

Les équations directes de Kolmogorov sont

$$\begin{aligned} P'_{00}(t) &= P_{00}(t)\lambda_{00} + P_{01}(t)\lambda_{10}, \\ P'_{01}(t) &= P_{00}(t)\lambda_{01} + P01(t)\lambda_{11}. \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} P'_{00}(t) &= -P_{00}(t)\alpha + P_{01}(t)\beta, \\ P'_{01}(t) &= P_{00}(t)\alpha - P_{01}(t)\beta. \end{aligned}$$

avec les conditions initiales $P_{00}(0) = 1$, $P_{01}(0) = 0$.

L'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} -\alpha-\lambda & \beta \\ \alpha & -\beta-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ou $\lambda(\lambda+\alpha+\beta) = 0$. Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -(\alpha+\beta)$. Notons $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}^T$ et $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}^T$, les vecteurs propres correspondant a λ_1 et λ_2

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= -(\alpha+\beta)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'ou $v_2 = \dfrac{\alpha}{\beta}v_1$, $u_2 = u_1$. Donc $V = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix}^T$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$. La solution générale du système d'équations est

$$\begin{pmatrix} P_{00}(t) \\ P_{01}(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-(\alpha+\beta)t}.$$

D'après les conditions initiales $1 = C_1 + C_2$, $0 = C_1\dfrac{\alpha}{\beta} - C_2$. Donc

$$C_1 = \frac{\beta}{\alpha+\beta},\ C_2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Et

$$\begin{aligned} P_{00}(t) &= \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t}, \\ P_{01}(t) &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t}. \end{aligned}$$

Exercice 06.

1) La matrice des intensités de transition est

$$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & -\lambda_m & \lambda_m & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Les équations de Kolmogorov sont

$$P'_0(t) = -\lambda_0 P_0(t),\ P_0(0) = 1,$$

$$P'_m(t) = \lambda_{m-1}P_{m-1}(t) - \lambda_m P_m(t), P_m(0) = 0, m \geq 1.$$

En intégrant la première équation on a $P_0(t) = e^{-\lambda_0 t}$. En résolvant l'équation linéaire homogène

$$P'_m(t) = -\lambda_m P_m(t)$$

on a $P_m(t) = C(t)e^{-\lambda_m t}$. Par la méthode de variation des constantes on a

$$C(t) = \lambda_{m-1} \int_0^t P_{m-1}(x) e^{\lambda_m x} dx$$

et

$$P_m(t) = e^{-\lambda_m t} \lambda_{m-1} \int_0^t P_{m-1}(x) e^{\lambda_m x} dx.$$

Exercice 07. Comme $p_{21} = p_{31} = 0$, on a

$$P(A_t) = P\{X_t = 1\} = P\{X_0 = 1, X_1 = 1, ..., X_t = 1\}$$

pour $\forall t \in \mathbb{N}$, d'ou

$$P(A_t) = P\{X_t = 1\} = P\{X_0 = 1\} P\{X_1 = 1 | X_0 = 1\} \cdots P\{X_t = 1 | X_{t-1} = 1\} = \frac{1}{3^t}.$$

Comme $\{A_t\}$, $t \in \mathbb{N}$ est une suite décroissante d'événements A_t, on en tire que

$$P(A) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{3^t} = 0.$$