الفصل الرابع

المصفوفات والمحددات

I- المصفوفات:

تعريف: ليكن $\mathbb{K}$ حقل تبديلي، مصفوفة هي جدول من عناصر $\mathbb{K}$ موزعة في أسطر وفي أعمدة.

تعريف: مصفوفة من m سطر و n عمود نقول عنها أنها من نوع $\mathcal{M}(m,n)$

مثال:

① $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 9 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ هي مصفوفة من نوع $\mathcal{M}(3,4)$

② $\begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2,5 & 8 \end{pmatrix}$ هي مصفوفة من نوع $\mathcal{M}(3,3)$

ترميز:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A مصفوفة من نوع $\mathcal{M}(m,n)$. عناصر هذه المصفوفة تمثل بـ: a_{ij} ، $i=1,\dots,m$ و $j=1,\dots,n$

الدليل الأول i يمثل السطر رقم i والدليل الثاني j يمثل العمود رقم j ويمكن أن نرمز للمصفوفة بالرمز التالي: $A=(a_{ij})_{m\times n}$

تعريف: مصفوفتان $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ من نفس النوع $\mathcal{M}(m,n)$ متساويتان إذا كان: $a_{ij}=b_{ij}$ ، $i=1,2,\dots,m$ و $j=1,2,\dots,n$

تعريف: ليكن $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ مصفوفتان من نفس النوع $\mathcal{M}(m,n)$،
مجموع المصفوفتان A و B هي المصفوفة $C=(c_{ij})$ من نوع $\mathcal{M}(m,n)$
حيث $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ ، $i=1,2,\dots,m$ و $j=1,2,\dots,n$

مثال:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} ، \quad B=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix} ، \quad C=A+B=\begin{pmatrix}1+1&2+0\\3+2&4+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\5&5\end{pmatrix}$$

تعريف: ليكن K حقل تبديلي، جداء مصفوفة $A=(a_{ij})$ من نوع $\mathcal{M}(m,n)$
بالسلمي λ هو المصفوفة $\lambda A=(\lambda a_{ij})$ ، $i=1,2,\dots,m$ و $j=1,2,\dots,n$

مثال:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} ، \quad 2.A=\begin{pmatrix}2&4\\6&8\end{pmatrix}$$

نظرية: المجموعة $\mathcal{M}(m,n)$ المزودة بالعمليتين $+$ و $.$ هي فضاء شعاعي.

تعريف:

أ) مصفوفة عمود هي مصفوفة من النوع $\mathcal{M}(m,1)$. $A=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}$

ب) مصفوفة سطر هي مصفوفة من النوع $\mathcal{M}(1,n)$ ، $A=(a_{11}\ a_{12}\dots a_{1n})$

ج) مصفوفة من النوع $\mathcal{M}(n,n)$ تسمى مصفوفة مربعة من الرتبة n
مجموعة المصفوفات المربعة نرمز لها بـ $\mathcal{M}_n(K)$،

تعريف: ليكن ~~A=(a_ij)~~ $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}(m,n)$. منقول المصفوفة A هي
المصفوفة ${}^tA=(b_{ij})\in\mathcal{M}(n,m)$ حيث $b_{ij}=a_{ji}$ ، $i=1,\dots,n$ ، $j=1,\dots,m$

تعريف: ليكن $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(K)$

أ) A مصفوفة تناظرية إذا كان $A={}^tA$.

ب) A مصفوفة ضد تناظرية إذا كان $A=-{}^tA$.

ج) القطر الأساسي للمصفوفة A يتكون من العناصر $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$
التي تسمى العناصر القطرية للمصفوفة A.

د) A مصفوفة قطرية إذا كانت العناصر الغير القطرية كلها معدومة.

هـ) A مصفوفة مثلثية سفليا إذا $a_{ij}=0$ ، $j>i$.

و) A مصفوفة مثلثية علوية إذا كان $A_{ij}=0$ ، ...

ي) المصفوفة القطرية التي كل عناصر القطرية تساوي 1 تسمى مصفوفة الوحدة، ونرمز لها بـ I_n.

تعريف: لتكن $A=(a_{ij})\in M_{(m,n)}$.

أ) A مصفوفة حقيقية إذا كان $K=\mathbb{R}$.

ب) A مصفوفة مركبة إذا كان $K=\mathbb{C}$.

المصفوفة المرفقة للتطبيق الخطي:

ليكن E، E' فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K، ذو أساسين على التوالي $B=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ و $B'=\{f_1,f_2,\dots,f_m\}$، ليكن T تطبيق خطي من E نحو E'.

$$T(e_j)\in E' \Rightarrow \exists\, \alpha_{1j},\dots,\alpha_{mj}\in K \;;$$

$$T(e_j)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij} f_i \;,\; j=1,\dots,n$$

تعريف: المصفوفة التي عناصرها هي α_{ij} ، $i=1,\dots,m$ و $j=1,\dots,n$ تسمى المصفوفة المرفقة لـ T بالنسبة للأساسين B و B'. ونرمز لها بـ $M_{(T,B,B')}$.

من هذا التعريف، العمود رقم j من $M_{(T,B,B')}$ يتكون من الإحداثيات α_{ij} للشعاع $T(e_j)$ في الأساس B' من E'.

إذن $M_{(T,B,B')}$ مرتبطة باختيار الأساسين B و B'.

مثال: ليكن $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ معرفة بـ $T(1,0)=(0,1,1)$ و $T(0,1)=(1,0,-1)$

ليكن $B=\{e_1=(1,0), e_2=(0,1)\}$ أساس $\mathbb{R}^2$ و $B'=\{f_1=(1,0,0), f_2=(0,1,0), f_3=(0,0,1)\}$ أساس $\mathbb{R}^3$.

تعيين $M_{(T,B,B')}$:

$$T(e_1)=T(1,0)=(0,1,1)=0(1,0,0)+1(0,1,0)+1(0,0,1)$$
$$=0f_1+1f_2+1f_3$$
$$\Rightarrow \alpha_{11}=0,\ \alpha_{21}=1,\ \alpha_{31}=1$$

$$T(e_2)=T(0,1)=(1,0,-1)=1(1,0,0)+0(0,1,0)+(-1)(0,0,1)$$
$$=1f_1+0f_2-1f_3$$
$$\Rightarrow \alpha_{12}=1,\ \alpha_{22}=0,\ \alpha_{32}=-1$$

لدينا ، $M_{(T,B,B')}$

$$M_{(T,B,B')}=\begin{array}{cc} T(e_1) & T(e_2) \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

نغير الأساس B بـ Γ ونعين $M_{(T,B,B')}$ ،

ليكن الأساس $B=\{e_1=(1,-1), e_2=(1,1)\}$ أساس T في E ،

$$T(e_1)=T(1,-1)=T((1,0)-(0,1))$$
$$=T(1,0)-T(0,1)$$
$$=(0,1,1)-(1,0,-1)=(-1,1,2)$$
$$=-1f_1+1f_2+2f_3$$
$$\Rightarrow \alpha_{11}=-1,\ \alpha_{21}=1,\ \alpha_{31}=2$$

$$T(e_2)=T(1,1)=T((1,0)+(0,1))=T(1,0)+T(0,1)$$
$$=(0,1,1)+(1,0,-1)=(1,1,0)$$
$$=1f_1+1f_2+0f_3$$
$$\Rightarrow \alpha_{12}=1,\ \alpha_{22}=1,\ \alpha_{32}=0$$

إذن ،

$$M_{(T,B,B')}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

نظرية

$$\dim \mathcal{M}(m,n)=m.n$$

مثال 1

المجموعة $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ يمكن كتابتها كما يلي ،

$$A=1\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_{11}}-2\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_{12}}+0\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{e_{21}}+5\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_{22}}$$

تعريف! المجموعة $\{e_{ij}\in\mathcal{M}(m,n),\ i=1\ldots m,\ j=1\ldots n\}$ تسمى الأساس القانوني لـ $\mathcal{M}(m,n)$ ،

نظرية ،

$$\dim \mathcal{L}(m,n)=m.n$$

تعريف: ليكن $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}(r,q,\mathbb{K})$ و $B=(b_{ij})\in \mathcal{M}(q,p,\mathbb{K})$
نسمي جداء A,B بهذا الترتيب المصفوفة $C=(c_{ij})$ من النوع (r,p) عناصرها معرفة كما يلي:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj} \quad , i=1,\dots,r \; , j=1,\dots,p$$

مثال: ليكن $A=(1\ 2\ 3)$ و $B=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

إذن
$$A.B=(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=(1.2+2.1+3.0)$$
$$=4$$

$A.B$ مصفوفة من النوع $(1,1)$.

ملاحظة: المصفوفات من النوع $(1,1)$ هي سلميات.

$$B.A=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}(1\ 2\ 3)=\begin{pmatrix}2.1 & 2.2 & 2.3\\1.1 & 1.2 & 1.3\\0.1 & 0.2 & 0.3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6\\1&2&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

الجداء $B.A$ هو مصفوفة من النوع $(3,3)$.

$$A.B\neq B.A$$

إذن جداء مصفوفتين ليس تبديلي

ملاحظة: لكي نتحصل على العنصر c_{ij} من المصفوفة $=B.A$ نضرب السطر رقم i من B بالعمود رقم j من A.
من تعريف جداء مصفوفتين لدينا:

1. ليكن C ، B و A ثلاث مصفوفات من النوع (s,t)، (t,m)، (m,n) على التوالي، إذن: $(CB)A=C(BA)$
2. ليكن ثلاث مصفوفات C,B,A من النوع (m,n)، (m,n) و (n,t) إذن $(A+B)C=AC+BC$
3. ليكن ثلاث مصفوفات C ، B ، A من النوع (m,n)، (m,n) و (t,m) إذن $C(A+B)=CA+CB$.
4. ليكن B ، A مصفوفتان من النوع (m,n) و (n,t) إذن
$$A(\lambda B)=\lambda(AB)$$

نظرية: جداء مصفوفتين يسمح لنا بإيجاد صورة عنصر $x \in E$ بتطبيق خطي $T: E \to E'$ على شكل مصفوفي. ليكن $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ و $B' = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ أساسين على التوالي لـ E و E'، إذن:

$$\forall x \in E \Rightarrow \exists c_j (j = 1, 2, \dots, n) \in \mathbb{K} : x = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j$$

$$T(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j T(e_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i \quad \text{— (1)}$$

$T(x) \in E'$ إذن $\exists y_j, j = 1, \dots, m \in \mathbb{K}$ حيث

$$T(x) = \sum_{j=1}^{m} y_j u_j \quad \text{— (2)}$$

من (1) و (2) نجد

$$T(x) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j a_{ij} \right) u_i = \sum_{j=1}^{m} y_j u_j$$

$$\Rightarrow y_i = \sum_{j=1}^{m} c_j a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m$$

لـ m المعادلة هذه يمكن كتابتهم على شكل مصفوفي التالي:

$$T(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T(e_1) & T(e_2) & \dots & T(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

حيث $y_1, y_2, \dots, y_m$ هم احداثيات $T(x)$ بالنسبة للأساس B لـ E'، $c_1, c_2, \dots, c_n$ هم احداثيات لـ x بالنسبة أساس B لـ E، العمود رقم j من المصفوفة $A = (a_{ij})$ يمثل احداثيات $T(e_j)$ بالنسبة لأساس B' لـ E'.

تعريف: ليكن $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(m, n, \mathbb{K})$ و $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}(n, m, \mathbb{K})$ نقول أن B هي مصفوفة عكسية يمنى لـ A. إذا كان $A.B = I_m$.

في هذه الحالة A مصفوفة عكسية يسرى لـ B.

تعريف: مجموعة A من $M_K(n)$ نقول أنها قابلة للقلب إذا وجدت مصفوفة B من $M_K(n)$ حيث:

$$AB = BA = I_n$$

ونرمز ~~للمقلوب~~ للمقلوب A لـ B بـ A^{-1}

إذا كانت A لا تقبل مصفوفة عكسية تسمى -----

مثال: تحقق من $B=\begin{pmatrix}1 & -2/3\\ 0 & 1/3\end{pmatrix}$ مقلوب $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

$$A.B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2/3\\ 0 & 1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=B.A$$

B هو مقلوب A.

نظرية: لتكن $A=(a_{ij})\in M_K(n)$. لتكن $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ أساس للفضاء شعاعي E على الحقل $\mathbb{R}$، لتكن $T:E\to E$ تطبيق خطي حيث $M(T,B,B)=A$، إذن T يقبل تطبيق عكسي إذا وفقط إذا كانت A قابلة للقلب.

تغيير الأساس:

لتكن E فضاء شعاعي على الحقل K ذو بعد n $(\dim E=n)$.

$B=\{e_1,\dots,e_n\}$ و $B'=\{e'_1,\dots,e'_n\}$ أساسين لـ E.

كل عنصر x من E يكتب:

(1)
$$x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

حيث x_i هي إحداثيات x بالنسبة لـ B من E.

(2)
$$x=\sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$$

حيث x'_i هي إحداثيات x بالنسبة لـ B' من E.

(3) $e'_i=\sum_{k=1}^{n} p_{ki} e_k$ ، $i=1,\dots,n$ ، p_{ki} هي إحداثيات e'_i بالنسبة لـ B من E.

من (1) و (2) و (3) لدينا:

$$x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i=\sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i=\sum_{i=1}^{n} x'_i \sum_{k=1}^{n} p_{ki} e_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x'_i p_{ki}\right) e_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\left(x_k-\sum_{i=1}^{n}x'_i P_{ki}\right)e_k=0$$

$$\Rightarrow x_k-\sum_{i=1}^{n}x'_i P_{ki}=0 \quad , k=1,2,\dots,n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}x'_i P_{ki}=x_k \quad , k=1,2,\dots,n \quad —(4)$$

نفرض

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \quad , X'=\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix}$$

$$P=(p_{ij})\in \mathcal{M}_{K}(n),$$

حيث العمود رقم j يتكون من احداثيات e'_j بالنسبة للأساس B من E.

من هذا الترميز، الـ n المعادلة المعطاة ب (4) يمكن كتابتها على شكل مصفوفي التالي،

$$X=PX'$$

حيث المصفوفة X مكونة من احداثيات الشعاع x من E بالنسبة للأساس B. والمصفوفة X' مكونة من احداثيات الشعاع x بالنسبة للأساس B' من E.

تعريف: المصفوفة P تسمى مصفوفة الانتقال من الأساس B الى الأساس B'.

نظرية: مصفوفة الانتقال P هي قابلة للقلب.

مثال: ليكن $B=\{(1,0),(0,1)\}$ و $B'=\{(1,1),(1,-1)\}$ أساسين من $\mathbb{R}^2$

تعيين مصفوفة الانتقال من B الى B'.

$$P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

تعيين مصفوفة الانتقال من B' إلى B يعني P^{-1}

نحسب احداثيات $(1,0)$ و $(0,1)$ بالنسبة للأساس B'،

$(1,0)$ و $(0,1)$ يكتب على التوالي $1/2(1,1)+1/2(1,-1)$

و $1/2(1,1)-1/2(1,-1)$ ، إذن :

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$x=(1,2)$ في الأساس B نعيين x في الأساس B'

$$x=(x_1,x_2)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=P^{-1}x=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

نظرية: ليكن $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ و $B'=\{e'_1,\dots,e'_n\}$ أساسين لـ ف.ش E على الحقل $\mathbb{K}$، ليكن T تطبيق خطي ذاتي من E نحو E، إذن المصفوفتين A و A' المرفقتان لـ T على التوالي بالنسبة لـ B و B' يحققان العلاقة التالية،

$$A'=P^{-1}AP$$

حيث P مصفوفة الانتقال من B إلى B'،

مثال: ليكن $B=\{(1,0),(0,1)\}$ و $B'=\{(1,1),(1,-1)\}$ أساسين لـ $\mathbb{R}^2$ و $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ تطبيق خطي حيث :

$$M(T,B,B)=A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(T,B',B')=A'=?$$

من مثال السابق :

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad P^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$A'=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$