للتحقق لدينا

$$(1,1)=1(1,0)+1(0,1)$$

$$T(1,1)=T(1,0)+T(0,1)$$
$$=(1,1)+(-1,1)=(1,1)-(1,-1)$$

$$T(1,-1)=T(1,0)-T(0,1)=(1,1)-(-1,1)$$
$$T(1,-1)=(1,1)+(1,-1)$$

$$M(T,B,B')=A'=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

II/ المحددات:

1-2/ التبديلات:

تعريف ليكن $X=\{1,2,\dots,n\}$ ، كل تقابل من X_n نحو X_n يسمى تبديلة من X_n .

ترميز كل تبديلة σ ممكن أن تكتب على الشكل التالي :

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}$$

حيث $\sigma(i)$ هي صورة i بواسطة σ .

مثال:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\sigma(1)=4,\ \sigma(2)=2,\ \sigma(3)=1,\ \sigma(4)=3$$

نظرية: لتكن $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ ثلاث تبديلات من X_n ، إذن :

1. ~~التكريب~~ التركيب $(\sigma_1\circ\sigma_2)$ هو تبديلة من X_n ،
2. $\sigma_1\circ(\sigma_2\circ\sigma_3)=(\sigma_1\circ\sigma_2)\circ\sigma_3$

تعريف: التبديلة من X_n حيث $\sigma(i)=i$ ، $\forall i\in X_n$ تسمى التبديلة الأحادية ونرمز لها بـ e .

ملاحظة: العدد الكلي لكل التبديلات من X_n يساوي $n!$

2.2: الأشكال الخطية المتناوبة:

تعريف: ليكن $E_1, E_2, \dots, E_n, F$ فضاءات شعاعية $(n+1)$ على نفس الحقل $\mathbb{K}$. تطبيق f من $E_1\times E_2\times\dots\times E_n$ على F يكون متعدد الخطية، إذا كان خطي بالنسبة لكل متغير x_i من E_i، $i=1,2,\dots,n$.

إذا كان $F=\mathbb{K}$ نقول f شكل متعدد الخطية.

f ثنائي الخطية إذا كان $n=2$.

تعريف: تطبيق متعدد خطية f معرف على E^n و يأخذ قيمه في F يكون متناوب إذا كان $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$ من أجل $x_i=x_j$ و $i\neq j$.

تعريف: ليكن f تطبيق متعدد الخطية متناوب معرفا على E^n و يأخذ قيمه في F و σ تبديلة على $X_n=\{1,2,\dots,n\}$ لدينا

$$f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\dots,x_{\sigma(n)})=(-1)^{\mathrm{card}(A)} f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

حيث:

$$A=\{(i,j) \mid i<j \text{ و } \sigma(i)>\sigma(j)\}$$

تعريف: ليكن $f: E^n \to F$ تطبيق متعدد الخطية متناوب و ليكن $x_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j$، $i=1,2,\dots,n$ حيث $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ أساس لـ E، لدينا:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}\, f(e_1,\dots,e_n)$$

تعريف: ليكن f تطبيق متعدد الخطية متناوب معرفا على E^n و يأخذ قيمه في F، لدينا إذا كانت $\{x_1,\dots,x_n\}$ مرتبطة خطيا من E، $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$.

مثال:

$$f: \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$$

معرف بـ

$$f(X,Y)=x_1y_2-x_2y_1$$

حيث $X=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ و $Y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$

f متعدد خطية متناوب.

بالفعل، f خطي من أجل X و Y. نفرض أن Y ثابت وتثبت f خطي بالنسبة لـ X.
ليكن $X, X' \in \mathbb{R}^2$ و $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$f(\alpha_1 X+\alpha_2 X', Y) = (\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_1')y_2 - (\alpha_1 x_2+\alpha_2 x_2')y_1$$
$$= \alpha_1 (x_1 y_2 - x_2 y_1) + \alpha_2 (x_1' y_2 - x_2' y_1)$$
$$= \alpha_1 f(X,Y) + \alpha_2 f(X',Y)$$

إذن f خطي بالنسبة لـ X. بنفس الطريقة، نثبت أن f خطي بالنسبة لـ Y، ومنه f متعدد الخطية.
f متناوب لأن $f(X,X) = x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0$.
ولدينا أيضا $f(X,Y)=0$ من أجل كل $X \in \mathbb{R}^2$ و $Y = \lambda X$
لأن
$$f(X,Y) = f(X, \lambda X)$$
$$= \lambda f(X,X) = 0.$$
$\lambda \in \mathbb{R}$

~~تطبيق~~

3.2 المحددات

تعريف: ليكن $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ أساس للفضاء الشعاعي E $\mathbb{K}$.
نسمي محدد الأشعة $x_1, x_2, \dots, x_n$ بالنسبة للأساس B، السلمي

$$\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

حيث

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$$ مع a_{ij}

تعريف: ليكن $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. نسمي محدد المصفوفة A السلمي

$$\det A = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

مثال: لتكن

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

حساب $\det A$

$$X_n = \{1, 2\}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon(\sigma_1) = 0$
$\varepsilon(\sigma_2) = -1$

$$\det A = \varepsilon(\sigma_1) a_{11} a_{22} + \varepsilon(\sigma_2) a_{12} a_{21}$$
$$= \dots - a_{12} a_{21}$$

ليكن $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، أشعاع من E ، حيث $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$

حيث $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ، أساس لـ E ، إذن ،

$$\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det A \quad , \quad A = (a_{ij})$$

بما أن $\det_B$ هو شكل متعدد الخطية متناوب ، إذن

نستنتج الخصائص التالية :

1) إذا كان ~~عمود~~ صفين من مصفوفة متساويين ، إذن

محددها معدوم ،

2) إذا غيرنا صفين من مصفوفة ، إذن محددها تغير

إشارته .

3) إذا كان أحد صفوف مصفوفة مضروب بسلمي α ،

إذن محددها يكون مضروب بـ α .

4) إذا كان أحد صفوف مصفوفة هو عبارة خطية من الصفوف

الأخرى ، إذن محددها معدوم ،

5) إذا كان أحد صفوف المصفوفة معدوم ، إذن محددها معدوم ،

نظرية : محدد مصفوفة مربعة يساوي محدد منقول هذه

المصفوفة ، $A \in M_K(n)$

$$\det A = \det A^t$$

ملاحظة : من هذه النظرية نستنتج أن الخصائص $(1-5)$

صحيحة كذلك من أجل الأعمدة .

نظرية : ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K ذو بعد n

و $T: E \to E$ تطبيق خطي ، إذن يوجد ثابت $\lambda \in K$ حيث

من أجل كل أساس $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ لدينا :

$$\det_B(T(x_1), \dots, T(x_n)) = \lambda \det_B(x_1, \dots, x_n)$$

حيث $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$

تعيين λ : لدينا من ~~[illegible]~~ قبل كل شكل متعدد الخطية

متناوب يكتب ،

$$f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \det_B(x_1, \dots, x_n)$$

$$f(e_1,\dots,e_n)=\lambda \det_B(e_1,\dots,e_n)=\lambda$$

إذن $\lambda=f(e_1,\dots,e_n)=\det_B(T(e_1),\dots,T(e_n))$

السلمي $\lambda=\det_B(T(e_1),\dots,T(e_n))$ يسمى محدد التطبيق T على E،
ونرمز له بـ $\det T$.

ملاحظة: السلمي $\lambda=\det T$ هو محدد المصفوفة المرفقة لـ T بالنسبة للأساس $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ من E.

مثال: ليكن $B=\{(1,0),(0,1)\}$ ~~و~~ و $B'=\{(1,1),(1,-1)\}$ أساسين لـ $\mathbb{R}^2$ و $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ تطبيق خطي حيث،
$$T(1,0)=(1,1),\quad T(0,1)=(-1,1)$$

حساب $\lambda=\det_B T$،

لدينا $M(T,B,B)=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det T=1+1=2$

حساب $\det_{B'}T$

لدينا

$$M'(T,B',B')=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$\det_{B'}T=2$،

ملاحظة: نلاحظ أن محدد تطبيق خطي لا يتعلق بالأساس المختار فهو يأخذ دائما نفس القيمة.

نظرية: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$، ليكن $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ أساس لـ E، f و g تطبيقان خطيان لـ E، إذن $\det_B(g\circ f)=\det_B g\,\det_B f$

نظرية: ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$، $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ أساس لـ E، f تطبيق خطي على E، إذن نشاكل f ذاتي (تقابل) إذا وفقط إذا كان $\det_B f\neq 0$.

نظرية: ليكن A و B مصفوفتان مربعتان من الرتبة n على $\mathbb{K}$، إذن $\det(AB)=\det A.\det B$

نظرية: مصفوفة $A\in\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$ قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان $\det A\neq 0$ وفي هذه الحالة، $\det A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}$.

4.2 حساب المحددات:

تعريف: ليكن $A=(a_{ij})\in M_K(n)$ ولتكن A_{ij} المصفوفة من النوع $(n-1, n-1)$ المحصل عليها بحذف السطر رقم i والعمود رقم j من A. نسمي cofacteur ذو الترتيب (i,j) العدد السلمي $D_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$، ونسمي $\det A_{ij}$ ~~المصغر~~ المصغر لـ a_{ij}.

نظرية: ليكن $A=(a_{ij})\in M_K(n)$ إذن:

① $\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}D_{ij}$ ، $1\leq i\leq n$

أو

② $\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}D_{ij}$ ، $1\leq j\leq n$

المعادلة ① تمدد نشر لـ $\det A$ بالنسبة للعناصر السطر i من A.

المعادلة ② تمدد نشر لـ $\det A$ بالنسبة للعناصر العمود j من A.

نظرية: ليكن $L=(D_{ij})$ و A مصفوفة قابلة للقلب إذن

$$A^{-1}=\frac{L^t}{\det A}.$$

مثال: عين محدد المصفوفة التالية:

$$A=\begin{pmatrix}4&1&5\\0&3&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

نحسب det بالنسبة للعناصر ~~السطر~~ العمود الأول

$$\det A=(-1)^{1+1}(4)\det\begin{pmatrix}3&-1\\0&2\end{pmatrix}+(-1)^{1+2}(0)\det\begin{pmatrix}1&5\\0&2\end{pmatrix}$$
$$+(-1)^{1+3}(0)\det\begin{pmatrix}1&5\\3&-1\end{pmatrix}$$

$$\det A=4\det\begin{pmatrix}3&-1\\0&2\end{pmatrix}=4(6)=24$$

ملاحظة: لتسهيل عملية الحساب نختار السطر أو العمود الذي يحتوي على أكبر عدد من الأصفار.

مثال 1: عين مقلوب المصفوفة السابقة؟

لدينا $\det A = 24 \neq 0$ إذن قابلة للقلب.

حساب المصفوفة المرافقة L لـ A

$L=(D_{ij})$ حيث $D_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$

$$D_{11}=(-1)^2\det\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=6$$

$$D_{12}=(-1)^3\det\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=0$$

$$D_{13}=(-1)^4\det\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0$$

$$D_{21}=(-1)^3\det\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}=-2$$

$$D_{22}=(-1)^4\det\begin{pmatrix}4 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}=8$$

$$D_{23}=(-1)^5\det\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0$$

$$D_{31}=(-1)^4\det\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & -1\end{pmatrix}=-16$$

$$D_{32}=(-1)^5\det\begin{pmatrix}4 & 5\\ 0 & -1\end{pmatrix}=4$$

$$D_{33}=(-1)^6\det\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=12$$

$$L=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ -2 & 8 & 0\\ -16 & 4 & 12\end{pmatrix}\Rightarrow L^t=\begin{pmatrix}6 & -2 & -16\\ 0 & 8 & 4\\ 0 & 0 & 12\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}6 & -2 & -16\\ 0 & 8 & 4\\ 0 & 0 & 12\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}3 & -1 & -8\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

ملاحظة: 1 مقلوب مصفوفة مثلثية هو مصفوفة مثلثية.

2 محدد مصفوفة مثلثية من النوع (n,n) يساوي جداء عناصرها القطرية.