# Chapitre 4

# Méthodes de résolution des équations differentielles

## 4.1 Définitions

Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une relation entre **une variable** indépendante notée $x$ et une variable dépendante, y , et ses dérivées successives. L'**ordre** de cette équation est déterminé par l'ordre du degré le plus élevé de la dérivation. D'une manière générale, il existe trois types de problèmes importants.

1. Equation differentielle donnée sous forme explicite $y\prime = f(x, y)$.
2. Les systèmes d'équations différentielles qui s'écrivent sous la forme : $M(x, y)y\prime = f(x, y)$ où $M(x, y)$ est une matrice, et $y'$ est une variable (vecteur).
3. Equation différentielle ordinaire implicite de la forme $f\left(x, y, y^{'}\right) = 0$.

Une équation différentielle possède une infinté de solutions. Et pour calculer une solution particulière, nous devons connaître une condition initiale. L'ensemble formé par l'équation différentielle et la condition initiale est appelé **problème aux valeurs initiales ou**

**problème de Cauchy** :

$$\begin{cases} y^{'} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \quad (PVI) \\ x \in [x_0, x] \end{cases} \tag{4.1}$$

**Remarque1 :** Ce problème possède une solution unique lorsque :

1. f est une application définie et continue sur $[x_0, x] \times R$.
2. f est lipschitizienne : il existe une constante $k > 0$ réelle, telle que $\mid f(x, \theta_1) - f(x, \theta_2) \mid \leq k \mid \theta_1 - \theta_2 \mid$, pour tout $x \in [x_0, T]$ et tout couple $(\theta_1, \theta_2) \in R \times R$, ( pour la démonstration de ces résultats et l'établissement d'importants théorèmes généreaux sur les équations differentielles, voir cours d'analyse).

**Remarque2 :**En réalité les systèmes d'équations différentielles contient les équations d'ordre supérieur à 1. Puisque une équation différentielle d'ordre $n$ :

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ...., y^{(n-1)}\right)$$

peut se transformer en un système de $n$ équations en posant :

$$y_1 = y,\ y_2 = y', ..., y_n = y^{(n-1)}$$

de manière que nous obtenions le système suivant :

$$y_1^{'} = y_2,\ y_2' = y_3, ..., y_n^{'} = f\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right).$$

## 4.2 Schémas de résolution numérique

À l'instar de la méthode d'Euler, celles de Runge-Kutta sont des schémas numériques à un pas basée sur la discrétisation de la variable $x$. On note $h$ ce pas et y$_n$ la valeur approchée de $y(x_n)$ pour les différents instants $x_n = nh$.

En intégrant l'équation différentielle entre $x_n$ et $x_{n+1}$ on a la relation

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_n+h} f(x, y(x))dx \tag{4.2}$$

L'idée consiste à approcher cette intégrale de façon plus précise

1. Par la méthode des rectangles à gauche, on obtient la méthode d'Euler explicite
2. Par la méthode des rectangles à droite, on obtient la méthode d'Euler implicite.
3. Par la méthode des trapèzes, on obtient la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2.
4. Par la méthode de Simpson, on obtient la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.( Rappelons que dans la formule de Simpson, on a 3 termes, le $1^{er}$ terme est approximé par Euler explicite, le $2^{ème}$ terme est approximé par Euler implicite, et le $3^{ème}$ terme est approximé par la méthode du point milieu )

# Exercices

## Exercice 1

Etant donné un pas de temps $h$ calculer approximativement à l'aide du dévelopement de Taylor à l'ordre 1 les valeurs $y(x_0 + h), y(x_0 + 2h), ....., y(x_0 + nh)$

1. Ecrire l'algorithme ( corespondant à cette méthode) d'Euler
2. pour $\begin{cases} y' = -y(x) + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $(PVI)$ faire trois itérations par l'algorithme d'euler.

## Exercice 2

Pour le ( $PVI$ ) $\begin{cases} y' = y(x) \\ y(0) = 1 \\ x \in [0, 1] \end{cases}$ $(PVI)$ l'erreur de la méthode d'Euler peut être analysé directement

1. Prouver que la solution approchée s'écrit sous la forme $y_h(x_n) = c(h)^{x_n}$, où $c(h) = (1+h)^{\frac{1}{h}}$.

2. En utilisant la formule de l'Hospital vérifie que $\lim_{h\to 0} c(h) = e$, en déduire que pour x=x$_n$ fixé, $lim_{h\to 0} y_h(x) = e^x$.

3. Prouver que $max_{0\leq x_n \leq 1} |y(x_n) - y_h(x_n)| = e - c(h)$. Que peut-on conclure.

## Exercice 3

Rappelons qu'un $(PVI)$ est une relation de la forme $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

1. Intégrer l'éq. précédente de $x_n$ à $x_{n+1}$ en utilisant la méthode des trapèzes.

2. Remplacer dans l'éq.obtenue $y(x_{n+1})$ par $y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$, alors on obtient la formule $y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{h}{2}[f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y_n + h(x_n, y(x_n))]$

3. Ecrire l'algorithme de cette méthode.

4. pour $\begin{cases} y' = -y(x) + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $(PVI)$ faire trois itérations par cet algorithme.

## Exercice 4

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 $(RK_2)$

1. Etant donné un pas de temps $h$, calculer approximativement à l'aide du dévelopement de Taylor à l'ordre 2 la valeur $y(x_{n+1})$.

2. On propose de remplacer l'expression obtenue par l'expression équivalente $y(x_{n+1}) = y(x_n) + a_1 hf(x_n, y(x_n)) + a_2 hf(x_n + a_3 h, y(x_n) + a_4 h)$. Déterminer les constantes $a_1, a_2, a_3$ et $a_4$ de telle sorte que ces deux expressions aient une erreur en $o(h^3)$.( développer la fonction de deux variables $f(x_n + a_3 h, y(x_n) + a_4 h)$ à l'ordre 1 autour du point $(x_n, y(x_n))$).

3. Par analogie des deux expressions, obtenir un système de 3 équations à 4 inconnues (c-à-d ce système ne possède pas une solution unique).

4. Pour un  choix convenable des $a_i$, écrire l'algorithme correspondant.

## Exercice 5

Méthode de Runge-Kutta d′ordre4 ($\mathrm{RK}_4$)

En reprenant le développement de Taylor de y(x) mais cette fois j′usqu′al′ordre5,un raisonement similaire à celui qui amené aux méthodes $\mathrm{RK}_2$ aboutit à un système de 8 équations non linéaires comprenant 10 inconnues. Le résultat final est la méthode de $RK_4$, qui représente un outil de grand utilité.

Algorithme $RK_4$ :

1. étant donné un pas de temps h, une condition intiale $(t_0, y_0)$ et un nombre maximal d'itérations $N$.