Université Mohammed Khider-BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et la nature et de la vie

Département d'informatique

Cours du Module

Théorie des langages

Pr. CHERIF Foudil

Chapitre 2: Introduction aux langages

1. Définition

Un langage sur un vocabulaire V est un sous ensemble des mots définis sur V, autrement dit un langage est une partie du monoïde libre V^* .

On peut différencier entre le langage vide ($L = \varnothing$) et le langage contenant le seul mot vide ($L = \{\varepsilon\}$)

Exemple :

$V= \{ a, b \}$

$V^* = \{ \varepsilon ,a,b,aa,bb,ab,ba,bb,aaa,\ldots \}$

$L = \{ aa, bb, ab, ba \}$ l'ensemble des mots sur V*de longueur égale à 2

Chapitre 2: Introduction aux langages

2. Syntaxe d'un langage

Une phrase est dite bien formée si est seulement si elle appartient au langage. La syntaxe d'un langage est l'ensemble des contraintes qui permettent de définir les phrases de ce langage.

Exemple : On peut définir un langage simple de mesure par les contraintes suivantes:

- **mesure** suivie d'un **opérateur** et d'une **mesure**
- une mesure est formée du nombre **1** suivi d'une **unité**
- les unités sont: **cm , litre, km**
- l'opérateur est le **+**

Les phrases bien formées sont:

1cm + 1cm	1cm + 1litre	1cm + 1km
1litre + 1cm	1litre + 1litre	1litre + 1km
1km + 1cm	1km + 1litre	1km + 1km

3. Sémantique d'un langage

La sémantique d'un langage est un ensemble de contraintes sur ce langage.

Parmi les phrases bien formées de l'exemple de mesure il y'a que quelques unes qui sont sémantiquement correctes, sont celles dont les unités sont de même type (mesure ou poids). Ces phrases sont:

1cm + 1cm	1cm + 1km	1litre + 1litre
1km + 1cm	1km + 1km	

4. Opérations sur les langages

Comme nous avons vu, les langages sont des ensembles de mots. Les opérations habituelles concernant les ensembles telles que l'union, l'intersection et la complémentation sont applicables aux langages

Soient deux langages $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ respectivement définis sur les alphabets $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$:

- L'union de $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ est le langage défini sur $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ contenant tous les mots qui sont soit contenus dans $\mathcal{L}_1$, soit contenus dans $\mathcal{L}_2$:

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{x / x \in \mathcal{L}_1 \text{ ou } x \in \mathcal{L}_2\}$$

- L'intersection de $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ est le langage défini sur $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ contenant tous les mots qui sont contenus à la fois $\mathcal{L}_1$ et dans $\mathcal{L}_2$:

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{x / x \in \mathcal{L}_1 \text{ et } x \in \mathcal{L}_2\}$$

- Le complément de $\mathcal{L}_1$ est le langage défini sur $\mathcal{A}_1$ contenant tous les mots qui ne sont pas dans $\mathcal{L}_1$:

$$C(\mathcal{L}_1) = \{x / x \notin \mathcal{L}_1\}$$

- La différence de $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ est le langage défini sur $\mathcal{A}_1$ contenant tous les mots de $\mathcal{L}_1$ qui ne sont pas dans $\mathcal{L}_2$:

$$\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 = \{x / x \in \mathcal{L}_1 \text{ et } x \notin \mathcal{L}_2\}$$

Chapitre 2: Introduction aux langages

- Le produit ou concaténation de $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ est le langage défini sur $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ contenant tous les mots formés d'un mot de $\mathcal{L}_1$ suivi d'un mot de $\mathcal{L}_2$:

$$\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2 = \{xy / x \in \mathcal{L}_1 \text{ et } y \in \mathcal{L}_2\}$$

L'opération de concaténation n'est pas commutative $L_1.L_2 \neq L_2.L_1$

- La puissance d'un langage L est définit par

$L^0 = \{\varepsilon\}$ $\qquad$ $L^{n+1} = L^n . L$

Chapitre 2: Introduction aux langages

- La fermeture itérative de $\mathcal{L}_1$ (ou fermeture de Kleene ou itéré de $\mathcal{L}_1$) est l'ensemble des mots formés par une concaténation finie de mots de $\mathcal{L}_1$:

$$\mathcal{L}_1* = \{x / \exists k \geq 0 et x1, \ldots, xk \in \mathcal{L}_1 \ \ tels\ que\ x = x1x2\ldots xk\}$$

$$\mathcal{L}_1* = \epsilon \cup \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_1^2 \cup \mathcal{L}_1^3 \cup \ldots \cup \mathcal{L}_1^n \cup \ldots$$

- L'opération miroir est notée : ~

soit x Є L

$x = x_1x_2\ldots x_p$

$x = x_px_{p-1}\ldots x_1$

L = { x / x Є L }

- Quelques remarques:

$L^+ = L . L^*$

$L^* \cdot L^* = L^*$

L = L

$L_1 \times L_2 = L_2 \times L_1$

$L^* = L^*$

Exemples :

Soient L1, L2 et L3 trois langages définis par :

$L_1 = \{\varepsilon, aa\}$, $L_2 = \{a^i b^j / i, j > 0\}$ et $L_3 = \{ab, b\}$.

Calculer :

$L_1.L_2$, $L_1.L_3$, $L_1 \cup L_2$, $L_2 \cap L_3$, L_1^{10} , L_1^* , L_2^R .

Solutions :

- $L_1.L_2 = L_2$;
- $L_1.L_3 = \{ab, b, aaab, aab\}$;
- $L_1 \cup L_2 = L_2$;
- $L_2 \cap L_3 = L_3$;
- $L_1^{10} = \{a^{2n} / 10 > n > 0\}$;
- $L_2^R = \{b^i a^j / i, j > 0\}$.