Université Mohamed Khider, Biskra 2019/2020
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Master 1: **M1.4 (Modèle linèaire)**

Série N°1 : Rappel de quelques notions d'algèbre linéaire

Exercice 1 *On considère les matrices suivantes:* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\ \text{et}\ \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits matriciels possibles? Quelles sont les matrices carrées et les matrices symétriques?

Exercice 2 *Soit la matrice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1- Vérifier que $\mathbf{A}$ *est une matrice symétrique.*
2- Calculer le déterminant de $\mathbf{A}$.
3- Déterminer les valeurs propres de $\mathbf{A}$.
4- Déterminer les vecteurs propres de $\mathbf{A}$ *associés à ces valeurs propres. Vérifier que ces derniers sont linéairement indépendants.*
5- $\mathbf{A}$ *est-elle diagonalisable?.*
6- En utilisant l'algorithme (ou procédé) de Gram-Schmidt, déterminer une base orthonormée formée de ces valeurs propres.
7- Déterminer deux matrices $\mathbf{D}$ *et* $\mathbf{P}$ *telles que:* $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^t$. *Vérifier par calcul cette égalité matricielle.*
8- Calculer $\mathbf{A}^n$, $n \geq 1$.

Exercice 3 *Soit la matrice*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathbf{M}$ *est inversible puis déterminer sa matrice inverse* $\mathbf{M}^{-1}$.
2. Déduire de la question 1 *une matrice* $\mathbf{X}$ *telle que*

$$2\mathbf{X}\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 *Soit* f *une application linéaire de* $\mathbb{R}^4$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice relativement aux bases canoniques et*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 9 \\ -1 & 2 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la rang de la matrice $\mathbf{M}$ *et donner une base de sous-espace vectoriel image de* f *(noté* $\operatorname{Im} f$*).*
2. Déduire de la question 1*, la dimension de sous-espace vectoriel noyau de* f *(noté* $\ker f$*), puis donner une base à ce dernier.*