République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE
DÉPARTEMENT DE Biologie

Chapitre 03 :

Le 19/03/2020

Par
Dr : CHALA ADEL

BioStatistiques

2019-2020

Je dédie ce travail............

A mes parents ils m'ont tous,
avec leurs moyens, soutenu et donné
la force d'aller toujours
plus loin.

Table des matières

Chapitre 1

Les lois classiques

1.1 Les lois discrèts

1.1.1 La loi de Bernoulli

Définition 1 *Une variable aléatoire X est dit suit la loi de Bernoulli, si la variable aléatoire X modilise une seule fois l'expériance aléatoire à deux issues possibles..*

Modilisation d'une loi de Bernoulli

Etape 01 : Soient Ω évènement des tous les résultats possibles, A évènement de Ω, et X une variable aléatoire qui représente les résultats d'une expèriance.

Etape 02 :On note par 01 (un) pour la variable aléatoire X si A est réalise (la réussite de A).

On note par 0 (zéro) pour la variable aléatoire X si A n'est pas réalise (L'echec de A).

Etape 03 : La probabilité de réussite l'évènement A c'est

$$P(A) = P(X = 1) = p.$$

La probabilité de l'echec l'évènement A c'est

$$P(\overline{A}) = P(X = 0) = q.$$

avec $p + q = 1$.

Conclusion La variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Exemple 2 *On lance une pièce de money une seule fois, on note par A l'évènement $\{$ obtenir une face$\}$. Déterminer la loi de probabilité pour cette experiance.*

Solution 3 ***Etape 01*** *: Soient Ω évènement des tous les résultats possibles*

$$\Omega = \{ \text{ Pille, Face} \} .$$

A évènement de Ω

$$A = \{ \text{ obtenir une face} \} .$$

X une variable aléatoire qui représente les résultats d'une expèriance.

Etape 02 *:On note par 01 (un) pour la variable aléatoire X si A est réalise (la réussite de A).*

On note par 0 (zéro) pour la variable aléatoire X si A n'est pas réalise (L'echec de A).

Etape 03 *: La probabilité de réussite l'évènement A c'est*

$$\begin{aligned} P(A) = P(X=1) &= \frac{\text{Nombre des cas convenables}}{\text{Nombre des cas possibles}} \\ &= \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{2} = p. \end{aligned}$$

La probabilité de l'echec l'évènement A c'est

$$\begin{aligned} P\left(\overline{A}\right) = P(X=0) &= \frac{\text{Nombre des cas convenables}}{\text{Nombre des cas possibles}} \\ &= \frac{\left|\overline{A}\right|}{|\Omega|} = \frac{1}{2} = q. \end{aligned}$$

avec $p + q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Conclusion *La variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$*

Paramètres caractéristiques

1/ La loi de probabilité pour la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ est donné par

$$\begin{cases} P(X=1) = p, \\ P(X=0) = q. \end{cases}$$

2/ Espérance pour la variable aléatoire X est donné par

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{2} kP(X=k) \\ &= 1P(X=1) + 0P(X=0) \\ &= 1p + 0q = p. \end{aligned}$$

3/ Moment d'ordre deux pour la variable aléatoire X est donné par

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \sum_{i=1}^{2} k^2P(X=k) \\ &= 1^2P(X=1) + 0^2P(X=0) \\ &= 1^2p + 0^2q = p. \end{aligned}$$

4/ Variance pour la variable aléatoire X est donné par

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left(X^2\right) - E^2(X) \\ &= \sum_{i=1}^{2} k^2P(X=k) - \left(\sum_{i=1}^{2} kP(X=k)\right)^2 \\ &= p - (p)^2 = p(1-p) = pq. \end{aligned}$$

Exemple 4 *Reprenons l'exaemple précédent, alors*

1/ La loi de probabilité pour la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ est donné par

$$\begin{cases} P(X=1) = \frac{1}{2}, \\ P(X=0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2/ Espérance pour la variable aléatoire X est donné par

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{2} kP(X=k) \\ &= 1P(X=1) + 0P(X=0) \\ &= 1\frac{1}{2} + 0\frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3/ Moment d'ordre deux pour la variable aléatoire X est donné par

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \sum_{i=1}^{2} k^2 P\left(X=k\right) \\ &= 1^2 P\left(X=1\right) + 0^2 P\left(X=0\right) \\ &= 1^2 \frac{1}{2} + 0^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4/ Variance pour la variable aléatoire X est donné par

$$\begin{aligned} Var\left(X\right) &= E\left(X^2\right) - E^2\left(X\right) \\ &= \sum_{i=1}^{2} k^2 P\left(X=k\right) - \left(\sum_{i=1}^{2} kP\left(X=k\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} = pq. \end{aligned}$$

1.1.2 La loi Binomiale

Définition 5 *La loi binomiale modilise à compter le nombre de succès dans l'experiance de Bernoulli avec plusieurs fois de répétitions.*

Modilisation d'une loi de Binomial

Etape 01 : Soient Ω évènement des tous les résultats possibles, A évènement de Ω, et X_i une variable aléatoire qui représente les résultats d'une expèriance de Bernoulli, avec $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Etape 02 :On note par 01 (un) pour la variable aléatoire X_i si A est réalise (la réussite de A).

On note par 0 (zéro) pour la variable aléatoire X_i si A n'est pas réalise (L'echec de A).

Etape 03 : La probabilité de réussite l'évènement A c'est

$$P\left(A\right) = P\left(X_i = 1\right) = p$$

La probabilité de l'echec l'évènement A c'est

$$P\left(\overline{A}\right) = P\left(X_i = 0\right) = q$$

avec $p + q = 1$.

Etape 04 : On note par S la somme des résultats obtenues par l'experiance de Bernoulli durant n fois de répétitions, d'où S représente le nombre de succès pour l'évènement A dans n répititions d'experiances de Bernoullialors pour déterminer la loi de probabilité pour la variable aléatoire S, et on veut calculer la probabilité pour que ce nombre égal à k, on a

$$P(S=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \text{ avec } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$
$$\text{et } n! = n(n-1)(n-2)...2 \times 1,$$
$$\text{et } k \in \{1,2,3,...,n\}.$$

Conclusion La variable aléatoire S suit la loi de binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Exemple 6 *Reprenons l'experiance de Bernoulli (une seule fois avec deux issues), mais on fait la répétition 10 fois de même experiance. On veut calculer la probabilité d'obtenir 04 faces parmi 10 répititions.*

Solution 7 ***Etape 01*** *: Soient Ω évènement des tous les résultats possibles, A évènement $= \{$ obtenir une face$\}$ de Ω, et X_i une variable aléatoire qui représente les résultats d'une expèriance de Bernoulli, avec $i \in \{1,2,3,...,10\}$.*

Etape 02 *: On note par 01 (un) pour la variable aléatoire X_i si A est réalise (la réussite de $face$).*

On note par 0 (zéro) pour la variable aléatoire X_i si A n'est pas réalise (L'echec de face).

Etape 03 *: La probabilité de réussite l'évènement A c'est*

$$P(\{\text{ obtenir une face}\}) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$$

La probabilité de l'echec l'évènement A c'est

$$P(\text{ obtenir une pille}) = P(X_i = 0) = \frac{1}{2}$$

avec $p + q = 1$.

Etape 04 *: On note par S la somme des résultats obtenues par l'experiance de Bernoulli durant 10 fois de répétitions, alors pour déterminer la loi de probabilité pour la variable aléatoire S, on veut calculer la probabilité pour que le nombre de* *succès des faces parmie 10 fois de répétitions c'est comme suite*

$$P(S=4) = C_{10}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-4}, \textit{ avec}$$

$$C_{10}^{4} = \frac{10!}{4!\,(10-4)!} = \frac{10\times(9)\times(8)\times\ldots\times4\times3\times2\times1}{4!6!}$$

$$= \frac{10\times9\times8\times\ldots5}{6!} = 210.$$

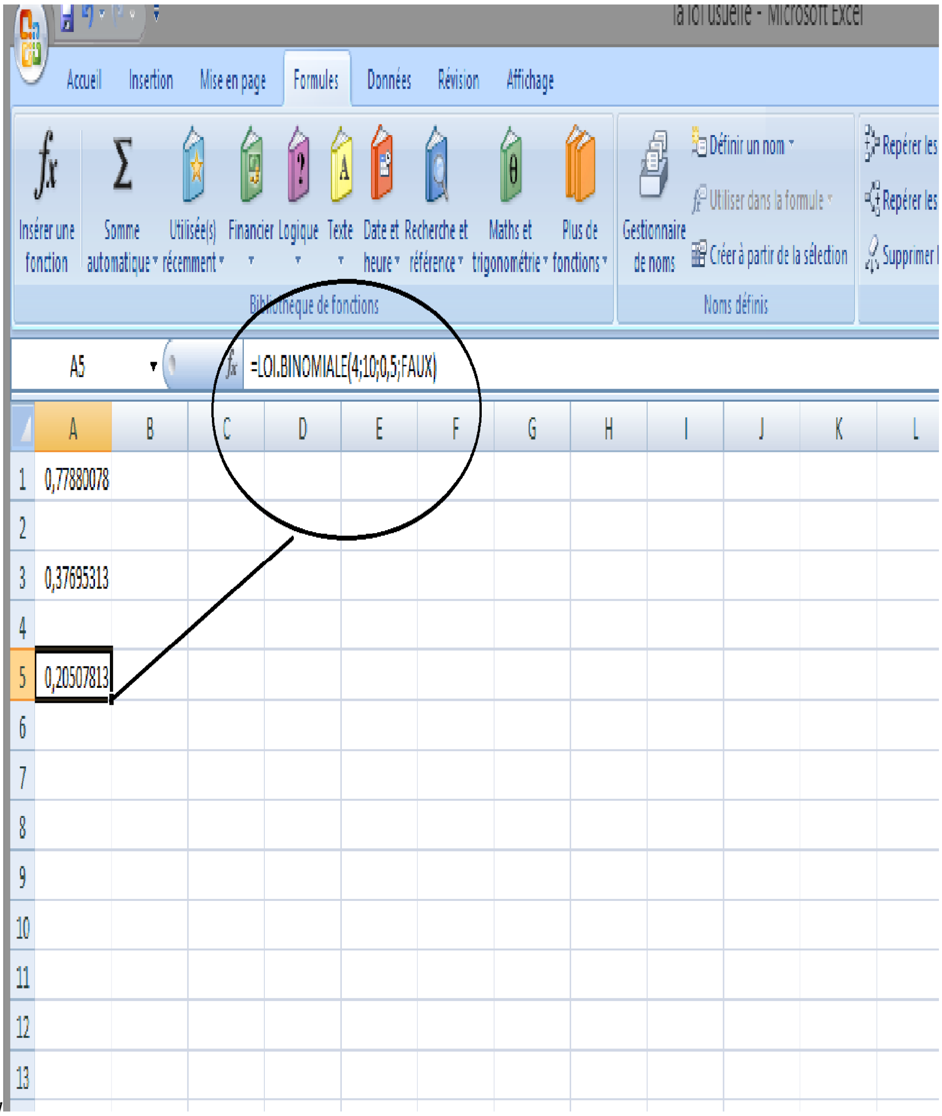
Alors

$$P(S=4) = 210\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}$$

$$= 0,205.$$

Vous pouvez obtenir la même résultat en application logiciel trés connue c'est EXCEL, on tape sur la bande f_x la phrase suivante LOI.BINOMIALE(4 ;10 ;0,5 ;FAUX) *et puis Ok on obtient directement la valeur 0,20507813.*

6+



2.png

Conclusion *: La variable aléatoire S suit la loi de binomiale* $\mathcal{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

Définition 8 *Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépandantes, alors*

$$\begin{aligned}
E(X+Y) &= E(X)+E(Y), \\
E(X+Y+Z) &= E(X)+E(Y)+E(Z), \\
E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} E(X_i), \\
Var(X+Y) &= Var(X)+Var(Y), \\
Var(X+Y+Z) &= Var(X)+Var(Y)+Var(Z), \\
Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i),
\end{aligned}$$

Paramètres caractéristiques

1/ La loi de probabilité pour la variable aléatoire S suit la loi de binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est donné par

$$P(S=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

2/ Espérance pour la variable aléatoire S suit la loi de binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est donné par

$$\begin{aligned}
E(S) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p = np.
\end{aligned}$$

3/ Variance pour la variable aléatoire S suit la loi de binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est donné par

$$\begin{aligned}
Var(S) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} pq = npq.
\end{aligned}$$

1.1.3 La loi Géométrique

Définition 9 *La loi géométrique modilisent le temps d'attent du premier succès dans l'experiance de Bernoulli.*

Modilisation de la loi géométrique

Etape 01 : Soient Ω évènement des tous les résultats possibles, A évènement de Ω, et X_i une variable aléatoire qui représente les résultats d'une expèriance de Bernoulli, avec $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Etape 02 :On note par 01 (un) pour la variable aléatoire X_i si A est réalise (la réussite de A).

On note par 0 (zéro) pour la variable aléatoire X_i si A n'est pas réalise (L'echec de A).

Etape 03 : La probabilité de réussite l'évènement A dans la i^{eme} experiance c'est

$$P(A) = P(X_i = 1) = p$$

La probabilité de l'echec l'évènement A c'est

$$P(\overline{A}) = P(X_i = 0) = q$$

avec $p + q = 1$.

Etape 04 : On note par T le premier temps pour avoir le succès de l'évènement A par l'experiance de Bernoulli durant n fois de répétitions, on pose que

$$\begin{aligned}
P(T = k) &= P(\text{le premier temps pour avoir le succès de l'évènement } A) \\
&= P(\text{Dans la 1er experiance on a l'echec d'évènement } A \\
&\text{Dans la 2eme experiance on a l'echec d'évènement } A \\
&\text{Dans la 3eme experiance on a l'echec d'évènement } A \\
&.... \\
&\text{Dans la k}^{\text{em}} \text{ experiance on a le succès d'évènement } A) \\
&= P\left(\overline{A_1} \text{ et } \overline{A_2} \text{ et} \overline{A_3} \text{ et} \overline{A_4} \text{ et.... et } A_k\right) \\
&= P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap .... \cap A_k\right) \\
&= P\left(\overline{A_1}\right) \times P\left(\overline{A_2}\right) \times P\left(\overline{A_3}\right) \times P\left(\overline{A_4}\right) \times ... \times P(A_k) \\
&= P(X_1 = 0) \times P(X_2 = 0) \times P(X_3 = 0) \times P(X_4 = 0) ... \times P(X_k = 1) \\
&= q \times q \times q \times q ... \times p \\
&= p \times q^{k-1}.
\end{aligned}$$

Conclusion La variable aléatoire T suit la loi de gémétrqiue $\mathcal{G}(p)$.

Exemple 10 *On lance une pièce de money 20 fois avec la loi de Berboulli. Quelle est la probabilité d'avoir la première face dans le cinquième experiance ?.*

Solution 11 ***Etape 01*** *: Soient* Ω *évènement des tous les résultats possibles,* A *évènement* $\{$ *Obtenir une face*$\}$ *de* Ω, *et* X_i *une variable aléatoire qui représente les résultats d'une expèriance de Bernoulli, avec* $i \in \{1, 2, 3, ..., 20\}$.

Etape 02 *:On note par 01 (un) pour la variable aléatoire* X_i *si* A *est réalise (la réussite de* $face$*).*

On note par 0 (zéro) pour la variable aléatoire X_i *si* A *n'est pas réalise (L'echec de* $face$*).*

Etape 03 *: La probabilité de réussite l'évènement* A *dans la* i^{eme} *experiance c'est*

$$P\left(\{\text{ Obtenir une face}\}\right) = P\left(X_i = 1\right) = \frac{1}{2} = p$$

La probabilité de l'echec l'évènement A *c'est*

$$P\left(\{\text{ Obtenir une pille}\}\right) = P\left(X_i = 0\right) = \frac{1}{2} = q$$

avec $p + q = 1$.

Etape 04 *: On note par* T *le premier temps pour avoir le premier succès de l'évènement* A *par l'experiance de Bernoulli durant* 20 *fois de répétitions, on pose que*

$$\begin{aligned}
P\left(T = 5\right) &= P\left(\text{le premier temps pour avoir le succès de premier face}\right) \\
&= P\left(\text{Dans la 1er experiance on a l'echec d'évènement } A\right. \\
&\quad \text{Dans la 2eme experiance on a l'echec d'évènement } A \\
&\quad \text{Dans la 3eme experiance on a l'echec d'évènement } A \\
&\quad \text{Dans la 4eme experiance on a l'echec d'évènement } A \\
&\quad \left.\text{Dans la } 5^{em} \text{ experiance on a le succès d'évènement } A\right) \\
&= P\left(\overline{A_1} \text{ et } \overline{A_2} \text{ et} \overline{A_3} \text{ et} \overline{A_4} \text{ et } A_5\right) \\
&= P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap A_5\right) \\
&= P\left(\overline{A_1}\right) \times P\left(\overline{A_2}\right) \times P\left(\overline{A_3}\right) \times P\left(\overline{A_4}\right) \times P\left(A_5\right) \\
&= P\left(X_1 = 0\right) \times P\left(X_2 = 0\right) \times P\left(X_3 = 0\right) \times P\left(X_4 = 0\right) \times P\left(X_5 = 1\right) \\
&= q \times q \times q \times q \times p \\
&= p \times q^{5-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0,031.
\end{aligned}$$

Conclusion *La variable aléatoire* T *suit la loi de gémétrqiue* $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

1.2 Les lois continiues

Définition 12 *On dit qu'une variable aléatoire X est continue si elle peut prendre seulement des valeurs réelle (dans $\mathbb{R}$).*

Définition 13 *On dit qu'une variable aléatoirev X admet une densité de probabilité f ssi*

1/

$$f \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

2/

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1.$$

Définition 14 *Espérance d'une variable aléatoire continue donnant par*

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx.$$

Définition 15 *Moment d'ordre deux d'une variable aléatoire continue donnant par*

$$E\left(X^2\right) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx.$$

Définition 16 *La variance d'une variable aléatoire continue donnant par*

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left(X^2\right) - E^2(X) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx - \left(\int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx\right)^2. \end{aligned}$$

1.2.1 La loi exponentielle

Définition 17 *On dit qu'une variable aléatoire continue est suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ "$Exp(\alpha)$" ssi sa densité de probabilité donnée par*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & si\ x \geq 0, \\ 0 & si\ x < 0. \end{cases}$$

Paramètres caractéristiques

1/ Densité de probabilité, on montre que f est bien une densité de probabilité

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx \\ &= \int_{0}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = \alpha \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \\ &= \alpha \frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha x} \big|_{0}^{+\infty} \\ &= -e^{-\alpha(+\infty)} - \left(-e^{-\alpha 0}\right) \\ &= 0 + e^{0} = 1.\end{aligned}$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1.$$

2/ Espérance d'une variable aléatoire continue qui suit la loi exponentielle $Exp(\alpha)$, donnant par

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} xf(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} xf(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{+\infty} x\alpha e^{-\alpha x} dx = \alpha \int_{0}^{+\infty} xe^{-\alpha x} dx.\end{aligned}$$

On effectuer l'intégration par partie, on pose

$$\begin{aligned}u = x &\text{ alors } u' = 1 \\ v' = e^{-\alpha x} &\text{ alors } v = \frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha x}\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int uv' &= uv - \int u'v \\ &= x\frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha x} \big|_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} 1 \times \frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha x} dx \\ &= 0 - \frac{1}{-\alpha} \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha x} \big|_{0}^{+\infty} = \frac{-1}{\alpha^2} \left(e^{-\infty} - e^{0}\right) = \frac{1}{\alpha^2}.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = \alpha \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x} dx = \alpha \times \frac{1}{\alpha^2} \\ &= \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

3/ Le moment d'ordre deux d'une variable aléatoire continue qui suit la loi exponentielle $Exp(\alpha)$, donnant par

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^2 \alpha e^{-\alpha x} dx = \alpha \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x} dx. \end{aligned}$$

On effectuer l'intégration par partie, on pos

$$\begin{aligned} u = x^2 &\text{ alors } u' = 2x \\ v' = e^{-\alpha x} &\text{ alors } v = \frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha x} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int uv' &= uv - \int u'v \\ &= x^2 \frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2x \times \frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha x} dx \\ &= 0 - \frac{2}{-\alpha} \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha} \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x} dx \\ &= \frac{2}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) = \frac{2}{\alpha^3}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx = \alpha \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x} dx = \alpha \times \frac{2}{\alpha^3} \\ &= \frac{2}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

4/ La variance d'une variable aléatoire continue qui suit la loi exponentielle

$Exp\left(\alpha\right)$, donnant par

$$\begin{aligned} Var\left(X\right) &= E\left(X^2\right) - E^2\left(X\right) \\ &= \frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \\ &= \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Exemple 18 *La durée de vie d'un matériel électronique suit une loi exponentielle de paramètre $\alpha = \frac{1}{20}$ (l'unité de temps est l'année). Quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore 5 ans après sa fabrication ?.*

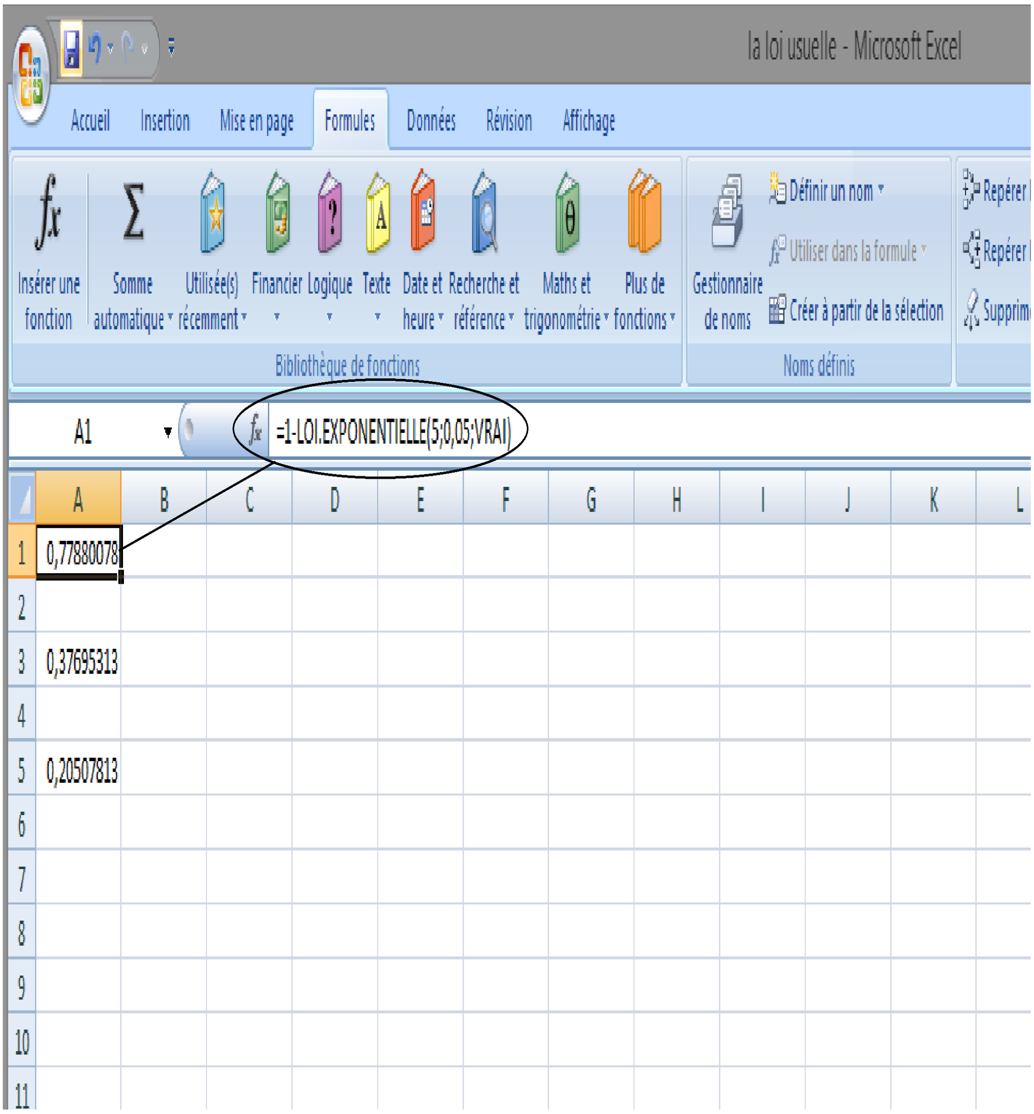
Calculer la durré de vie moyen pour le matériel électronique.

Solution 19 *On note par X la variable aléatoire qui représent la durrée de vie pour cette matériel électronique, alors il est clair que X suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha = \frac{1}{20}$*

Pour cela il suffit de calculer la probabolité suivant, avec f c'est la densité de probabilité pour la loi exponentielle

$$\begin{aligned} P\left(X \geq 5\right) = P\left(X \in [5, +\infty]\right) &= \int_5^{+\infty} f\left(x\right) dx \\ &= \int_5^{+\infty} \frac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}x} dx = \frac{1}{20} \int_5^{+\infty} e^{-\frac{1}{20}x} dx \\ &= \frac{1}{20} \left(-\frac{1}{\frac{1}{20}} e^{-\frac{1}{20}x}\right)_5^{+\infty} = \frac{1}{20} 20 \left(-e^{-\frac{1}{20}x}\right)_5^{+\infty} \\ &= -e^{-\frac{1}{20}(\infty)} - \left(-e^{-\frac{1}{20}(5)}\right) = -0 + e^{-4} = e^{-4} = 0,778. \end{aligned}$$

Vous pouvez obtenir la même résultat en application logiciel trés connue c'est EXCEL, on tape sur la bande f_x la phrase suivante "=1-LOI.EXPONENTIELLE(5;0,05;VRAI)" *et puis Ok on obtient directement la valeur 0,778800783.*



2/ La durré de vie moyen, il suffit de calculer son espérance

$$E(X)) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x\frac{1}{20}e^{-\frac{1}{20}x}dx = \frac{1}{20}\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{1}{20}x}dx$$
$$= \frac{1}{20}\left(\frac{1}{\frac{1}{20}}\right)^2 = 20\ ans$$

Alors la durée de vie c'est 20 ans.

Exemple 20 *Considérons le cas d'une variable X de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Sa densité f_X est constante sur l'intervalle $[0,1]$ et vaut zéro ailleurs,* *comme suite*

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [0,1], \\ 0 & si\ x \notin [0,1] \end{cases}$$

1/ On peut vérifier facilement que la fonction f_X *ainsi définie est densitié de probabilité, en effet*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx + \int_{0}^{1} f_X(x)\,dx + \int_{1}^{+\infty} f_X(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{1} f_X(x)\,dx = \int_{0}^{1} 1dx = x\,\big|_{0}^{1} = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1.$$

2/ Espérance d'une variable aléatoire continue qui suit la loi uniforme $U(0,1)$, *donnant par*

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} xf(x)\,dx + \int_{0}^{1} xf(x)\,dx + \int_{1}^{+\infty} xf(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{1} xf(x)\,dx = \int_{0}^{1} x1dx = \frac{1}{2}x^2\,\big|_{0}^{1} = \frac{1}{2}\left(1^2 - 0^2\right) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Alors

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

3/ Le moment d'ordre deux d'une variable aléatoire continue qui suit la loi uniforme $U(0,1)$, *donnant par*

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)\,dx + \int_{0}^{1} x^2 f(x)\,dx + \int_{1}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{1} x^2 f(x)\,dx = \int_{0}^{1} x^2 1dx = \frac{1}{3}x^3\,\big|_{0}^{1} = \frac{1}{3}\left(1^3 - 0^3\right) \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4/ La variance d'une variable aléatoire continue qui suit la loi uniforme $U(0,1)$, *donnant par*

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left(X^2\right) - E^2(X) \\ &= \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

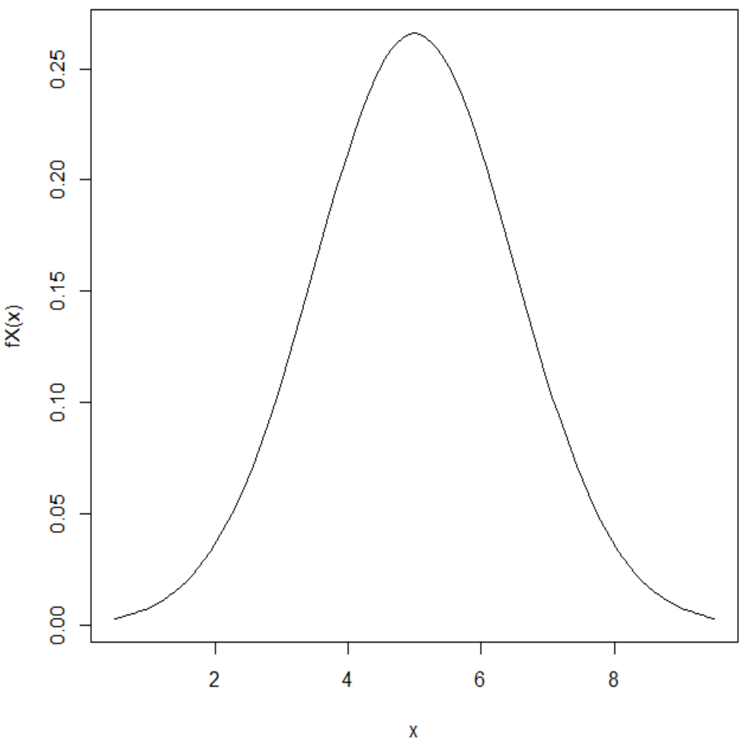
1.2.2 La loi de Gauss (La loi normale)

Définition 21 *Soient* $m \in \mathbb{R}$ *et* $\sigma \in \mathbb{R}_+$, *la loi normale de paramètre* (m, σ) *est la loi de densité*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On dit que X *suit la loi* $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

normale



$_4$*.png*

Paramètres caractiriqtiques

1/ $f > 0$.

2/

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1.$$

3/ Esperance

$$E(X) = m.$$

4/ Variance

$$Var) = \sigma^2.$$