Université Mohamed Khider Biskra

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Vie

$2^{ème}$ Année Physique (LMD)
Module: fonctions de la variable complexe
Ann Univ: 2019/2020

INTÉGRABILITÉ DANC $\mathbb{C}$

Chemin : Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$.Un chemin γ est une fonction continue, d'un intervalle fermé $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$

$$\gamma : [a, b] \to D$$

Les points $\gamma(a)$ *et* $\gamma(b)$ sont applés origine et extrémité du chemin γ. Un chemin γ est fermé (lacet) si $\gamma(a) = \gamma(b)$. γ est différentiable si γ est dérivable dans $[a, b]$ et admet une dérivée à gauche au point b et une dérivée à droite au point a, un chemin est continûment différentiable (de classe C^1) s'il est différentiable et si sa fonction dérivée est continûe, un chemin est différentiable par morceaux, s'il existe une subdivision $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ telle que la restriction de γ à chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ soit de classe C^1.

Chemins équivalents : Soient $\gamma_1 : [a, b] \to D$ et $\gamma_2 : [c, d] \to D$, deux chemins. On dit que γ_1 et γ_2 sont équivalents s'il existe une bijection strictement croissante $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ continue et continument dérivable par mrceaux ainsi que la fonction réciproque φ^{-1} telle que $\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t))$

Juxtaposition de chemins (raccordement) : Soient $\gamma_1 : [a, b] \to D$ et $\gamma_2 : [c, d] \to D$, deux chemins et $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ et b$\leq c$. Le chemin γ_3 défini par :$\gamma_3(t) = \gamma_2(t + c - b)$, $t \in [b, b + d - c]$ est équivalent au chemin γ_2. Le chemin γ défini sur $[a, b + d - c]$ par :

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a, b] \\ \gamma_3(t) & t \in [b, b + d - c] \end{cases}$$

est appelé la juxtaposition des chemins γ_1 et γ_2 et est noté $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$

Longueur d'un chemin : Soit $\gamma : [a, b] \to D$ un chemin, et S une subdivision de $[a, b]$

$$S = \{(t_0, t_1, ..., t_n) \,/\, a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$$

et définissons la quantité

$$V(\gamma, S) = \sum_{0 \leq j \leq n-1} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| = \int_a^b |\acute{\gamma}(t)| \, dt$$

Chemin rectifiable ou à variation bornée: si l'ensemble :

$$\{V(\gamma, S), S \text{ décrit la famille de toutes les subdivisions de } [a, b]\}$$

est borné, la borne supérieure $V(\gamma)$ est appelée la variation totale de γ.

Homotopie: Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et γ_1, γ_2 deux chemins dans D et définis sur le même intervalle I=$[a, b]$.On dit que γ_1 est homotopie à γ_2 dans D, s'il existe une fonction continue $\varphi : I \times J \to D$, $J = [c, d] \subset \mathbb{R}$, telle que :

$$\varphi(t, c) = \gamma_1(t) \text{ et } \varphi(t, d) = \gamma_2(t), \text{ t} \in [a, b]$$

Ensemble simplement connexe : Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, on dit que D est simplement connexe si tout lacet est homotope à un point dans D.

INTÉGRATION DANS LE DOMAINE COMPLEXE

Intégrale curviligne complexe : Soit $f(z)$ une fonction continue en tout point d'une courbe C de longueur finie, partageons C en n intervalles au moyen des points z_1, $z_{2,}..., z_{n-1}$, arbitrairement choisis et posons $z_0 = a$ et $z_n = b$. Sur chaque arc joignant z_{k-1} à z_k, $k = 1, ..., n$. On choisit un point ξ_k, formons la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \triangle z_k$$

Si la longueur $|\triangle z_k| \to 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \triangle z_k = \int_C f(z)\,dz$$

appelé intégrale curviligne de $f(z)$ de long de C.

<u>**Relation entre intégrales curvilignes réelles et complexes :**</u> Si $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ alors :

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_C (P(x,y) + iQ(x,y))(dx + idy) \\ &= \int_C (P(x,y)\,dx - Q(x,y)\,dy) + i\int_C (Q(x,y)\,dx + P(x,y)\,dy)\end{aligned}$$

Si C est continûment différentiable et a pour représentation paramétrique $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ oŭ $t_0 \le t \le t_1$, alors :

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_C (P(x,y) + iQ(x,y))(dx + idy) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (P(\phi(t),\psi(t)) + iQ(\phi(t),\psi(t)))\left(\acute{\phi}(t)\,dt + i\acute{\psi}(t)\,dt\right) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (P(\phi(t),\psi(t)) + iQ(\phi(t),\psi(t)))\left(\acute{\phi}(t) + i\acute{\psi}(t)\right)dt\end{aligned}$$

ou $z = Z(t)$ et $t_0 \le t \le t_1$, alors :

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} f(Z(t))\,\acute{Z}(t)\,dt$$

<u>**Propriétés des intégrales curvilignes :**</u> Si $f(z)$ et $g(z)$ sont intégrables de long de C, alors :

1) $\int_C (f(z) + g(z))\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz$
2) $\int_C Af(z)\,dz = A\int_C f(z)\,dz$
3) $\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz$
4) $\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$

<u>**Formule de Green :**</u> Soit $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ deux fonctions continues et à dérivées partielles continues dans un ouvert connexe D (domaine) et sa frontière C. Alors on a la formule de Green :

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

<u>**Forme complexe de la formule de Green :**</u> Soit $F(z,\bar{z})$ une fonction continue à dérivées partielles continues dans un ouvert connexe D et sur sa frontière C et soit $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, alors :

$$\oint_C F(z,\bar{z})\,dz = 2i\iint_D \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}dxdy$$

<u>**Primitive d'une fonction complexe :**</u> Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe dans D. La fonction F de D dans $\mathbb{C}$ est applée primitive de f si F est holomorphe dans D et $\acute{F}(z) = f(z)$, $\forall z \in D$

Théorème : Soit D un ouvert simplement connexe, toute fonction holomorphe f admet une primitive sur D et la fonction $z \to F(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)\,dt$ oŭ z_0 et $z \in D$ et z_0 fixé ne dépend pas du chemin dans D de z_0 vers z.

<u>**Théorème de Cauchy**</u> : Soit D un ouvert connexe γ_1, γ_2 deux lacets homotopes dans D. Pour toute fonction f holomorphe dans D, on a :

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma 2} f(z)\,dz$$

Corollaire : Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un ouvert simplement connexe D, alors :

$$\forall\gamma \text{ un lacet dans } D, \text{ on a : } \int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

on particulier :

$$f \text{ admet une primitive } \Leftrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 0,\ \forall\gamma \text{ un lacet dans } D$$

Proposition : Soit f une fonction complexe holomorphe sur un ouvert connexe D de $\mathbb{C}$, F est une primitive de f et γ un chemin différentiable par morceaux dans D définie sur un segment $[a,b]$. On a :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Indice d'un point par rapport à un lacet : Soit $\gamma : [a,b] \to D$ un lacet, et $z_0 \notin \gamma([a,b])$, on appelle indice du point z_0 par rapport à γ, le nombre :

$$I(z_0,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$$

Proposition 1:

1. L'indice $I(z_0,\gamma)$ est un nombre entier rationnel
2. $I(z_0,\gamma) = -I(z_0,-\gamma)$
3. $I(z_0,\gamma_1 \vee \gamma_2) = I(z_0,\gamma_1) + I(z_0,\gamma_2)$

Proposition 2:

-Soit γ un chemin fermé de $\mathbb{C}$, pour tout ensenble ouvert connexe $D \subset \mathbb{C} - \gamma([a,b])$; la fonction $z_0 \to I(z_0,\gamma)$ est constante dans D.

-Si γ un chemin fermé contenu dans un ouvert simplement connexe D. Alors pour tout $z_0 \notin D$, $I(z_0,\gamma) = 0$

Formule intégrale de Cauchy :

Défnition de fonction analytique : une fonction $f : D \to \mathbb{C}$ est dite analytique au point z_0 si elle est développable en série entière au voisinage de z_0,

$$\exists(a_n) \in \mathbb{C}^N,\ \exists r > 0,\ \forall z \in \mathbb{C},\ \ |z-z_0| \leq r \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Remarque 1 : On appelle rayon de convergence d'une série entière le nombre $R \in [0,+\infty]$, tel que :

-la série converge si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z-z_0)^n|$ converge pour tout $|z-z_0| < R$.

-la série diverge pour $|z-z_0| > R$

On appelle disque de convergence le disque de centre z_0 et de rayon R.

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,\ R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_{n+1}|}}$$

Remarque 2 : Toute fonction analytique est holomorphe, et de plus :

$$\acute{f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

Toute fonction analytique f son développement en série entière en un point z_0 est donné par sa série de Taylor :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Théorème (formule intégrale de Cauchy) : Soit D un ouvert simplement connexe, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet dans D. Pour toute fonction analytique $f : D \to \mathbb{C}$ et pour tout $z_0 \notin \gamma([a,b])$, on a :

$$f(z_0)\, I(z_0,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

Corollaire : Soit une fonction f holomorphe sur un ouvert D de $\mathbb{C}$ et soit Ω un disque fermé contenus dans D dont le bord est noté γ. On a :

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \begin{cases} 2\pi i f(z_0) & \text{si } z_0 \text{ est intérieur à } \Omega \\ 0 & \text{si } z_0 \text{ est extérieur à } \Omega \end{cases}$$

Théorème : Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert simplement connexe D, z_0 un point de D et γ un chemin fermé ne passant pas par z_0. Alors f est indéfiniment dérivable dans D et ses dérivées sont données pour tout $n \geq 1$ par :

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

Généralisation de la formule de Cauchy :

Définition : On appelle couronne de centre a et de rayons r_1 et r_2 l'ensemble :

$$C = \{z \in \mathbb{C}, 0 < r_1 < |z-a| < r_2\}$$

- C n'est pas simplement connexe
- Soient $\acute{r}_1$ et $\acute{r}_2$ tels que $r_1 < \acute{r}_1 < \acute{r}_2 < r_2$

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0,2\pi] &\to \mathbb{C} \\ t &\to a + \acute{r}_1 e^{it} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \gamma_2 : [0,2\pi] &\to \mathbb{C} \\ t &\to a + \acute{r}_2 e^{it} \end{aligned}$$

γ_1 et γ_2 sont homotopes.

Théorème : $f : C \to \mathbb{C}$ une fonction analytique, et $C = \{z \in \mathbb{C}, 0 < r_1 < |z-a| < r_2\}$. Alors pour tout z_0 vérifiant $0 < r_1 < \acute{r}_1 < |z-a| < \acute{r}_2 < r_2$, on a :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz$$

avec :$\gamma_1(t) = a + \acute{r}_1 e^{it}$ et $\gamma_2(t) = a + \acute{r}_2 e^{it}$.

Université Mohamed Khider Biskra

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Vie

$2^{ème}$ Année Physique (LMD)
Module: fonctions de la variable complexe
Ann Univ: 2019/2020

RÉSIDUS

Séries de Laurent : On appelle série de Laurent au voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$, une série de la forme :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}$$

où a_n les coefficients de la série, on dit que la série de Laurent est converge si et seulement si les deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ e :t $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}$ converges, tel que R_1 est le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ et $\dfrac{1}{R_2}$ est le rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}$, alors la série de Laurent converge dans la couronne :

$$C = \{z \in \mathbb{C}/ \ R_2 < |z-z_0| < R_1\}$$

où C la couronne de convergence de la série de Laurent,

Définition : Soit f une fonction complexe définie sur un ouvert de U contenant la couronne C. On dit que f est développable en série de Laurent dans C,s'il existe une série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n (z-z_0)^n$ convergente dans C dont la somme coincide avec f en tout point de C et il est unique.

Théoréme : Si f est holomorphe dans C, alors f est développable en série de Laurent dans C.

Remarque : Les coefficients a_n, $n \geq 0$, du développement de Laurent ne sont pas nécessairement de la forme $\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, car f n'est pas analytique dans un voisinage de z_0. On a :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \ \forall z \in \mathbb{Z}$$

où γ est le cercle $D_r(z_0)$ avec $R_2 < r < R_1$.

Points singuliers : Soit f une fonction analytique dans un ensemble ouvert connexe : $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}/ \ |z-z_0| < R\} \subset \mathbb{C}$; soit a un point frontière de $D(z_0, R)$, c'est à dire $|a - z_0| = R$. Si f peut etre prolonger en une fonction analytique en a, on dira que a est un point régulier, f est donc bornée au voisinage de a, si non est un point singulier.

Soit le développement de Laurent d'une fonction f au voisinage de a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}$$

Trois cas se présentent alors :

4. Tous les a_{-n} sont nuls. f est analytique en a. Le développement de Laurent coincide avec la série de Taylor au voisinage de a.

5. Un nombre fini de a_{-n} n'est pas nuls. Soit alors m le plus grand entier positif tel que $a_{-m} \neq 0$.Alors $(z-a)^m f(z)$ est analytique au point a. On dira que a est une singularité d'ordre m, ou pôle d'ordre m; (pôle simple, double, triple,...pour $m = 1, 2, 3, ...$) .

6. Un nombre infini de termes a_{-n} n'est pas nul. a est appelé singularité essentielle de f. Pour tout entier positif m; $(z-a)^m f(z)$ n'est pas borné au voisinage de a.

<u>Résidus :</u>

Définition : Soit $f : C \to \mathbb{C}$ une fonction analytique au point z_0, et $C = \{z \in C / \ 0 < |z - z_0| < R\}$ $(\textit{disque troué})$. On appelle résidu de f au point z_0, le cefficient a_{-1} du développement de Laurent de f au voisinage de z_0. Ce nombre est noté $\operatorname{Re} s\,(f, z_0)$

Calcul des Résidus :

I) Si z_0 est un pôle simple alors :

$$\operatorname{Re} s\,(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\, f(z)$$

II) Si z_0 est un pôle multiple alors :

$$\operatorname{Re} s\,(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z)\right]$$

Théorème de Résidus : Si la fonction $f(z)$ possède plusieurs pôles à l'intérieur d'un contour :

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} s\,(f, z_0)$$

Calculs d'intégrales réelles par les complexes :

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx : \begin{cases} 1) \ \oint_C f(z)\, dz \text{ où C=} \\ 2) \text{ Utilise le théorème des résidus puis prendre } R \to +\infty \end{cases}$
- $\int_0^{2\pi} f(\cos x, \sin x)\, dx : \begin{cases} 1) \text{ Poser } z = e^{ix}, \ \cos x = \dfrac{z + z^{-1}}{2}, \sin x = \dfrac{z - z^{-1}}{2i}, dx = \dfrac{dz}{ix} \\ 2) \text{ Calculer } \oint_C f(z)\, dz \text{ avec le théorème des résidus où } C = \end{cases}$