Biskra, le 29 Mars 2020

Devoir1 : Analyse numérique, 2ème Année

Calcul des racines d'un système d'équations non-linéaires avec Newton

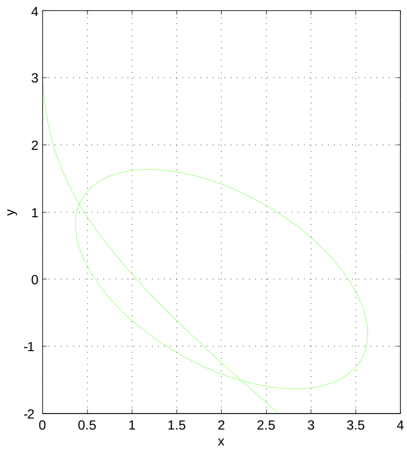
Calculer les racines réelles du système : $\begin{cases} f_1(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + xy - 3 = 0 \\ f_2(x,y) = x \exp\hat{}(x+y) + y - 3 = 0 \end{cases}$

Dans le cas des equations de deux variables, leurs graphiques peuvent etre visualiser dans le plan. Les racines sont leurs intersections.

Le shéma suivant obtnu avec Matlab montre les graphes de ses deux equations

Ce graphe est obtenu avec les commandes suivantes :

```
>> syms x y
>> f1=(x-2)^2+(y-1)^2+x*y-3;
>>f2=x*exp(x+y)+y-3;
>> ezplot(f1,[0,4,-2,4]), grid on, hold on
>>ezplot(f2,[0,4,-2,4])
```



Obtention de la solution avec la méthode de Newton

$$\begin{cases} f_1(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + xy - 3 = 0 \\ f_2(x,y) = x \exp\hat{}(x+y) + y - 3 = 0 \end{cases}$$

Commencons par le vecteu initial $X^{(0)} = \begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,0 \end{bmatrix}$ obtenu du graphe

Matrice jacobienne

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y-4 & x+2y-2 \\ e^{x+y}(1+x) & xe^{x+y}+1 \end{bmatrix}$$

Pour $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x-2)^2 + (y-1)^2 + xy - 3 \\ x \exp\hat{}(x+y) + y - 3 \end{bmatrix}$

L'équation de récurence est

$X^{(k+1)} = X^{(k)} - (J^{(k)})^{-1} F^{(k)}$,

1ère itération k=0

$X^{(1)} = X^{(0)} - (J^{(0)})^{-1} F^{(0)}$,

$$\left[\begin{array}{c} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0,5 \\ 1 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{cc} 2(0,5)+1-4 & 0,5+2(1)-2 \\ e^{0,5+1}(1+0,5) & 0,5e^{0,5+1}+1 \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} (0,5-2)^2+(1-1)^2+0,5(1)-3 \\ 0,5e^{0,5+1}+1-3 \end{array}\right]$$

Vérification des calculs avec la programmation

Le calcul des racines pour l'exemple précedent peut se faire directement à l'aide de la fenetre Matlab $X^{(k+1)} = X^{(k)} - (J^{(k)})^{-1} F^{(k)}$

```
>> syms x y
>> f1=(x-2)^2+(y-1)^2+x*y-3;
>>f2=x*exp(x+y)+y-3;
>>J= [ diff(f1,x) diff(f1,y); diff(f2,x) diff(f2,y)]
J =
[ 2*x + y - 4, x + 2*y - 2]
[ exp(x + y) + x*exp(x + y), x*exp(x + y) + 1]
>> F =[f1;f2];
>> X=[x;y];
>> x=0.5; y=1;
>>X=eval(X)        valeur initiale
X =
0.5000
1.0000
>> X=X-inv(eval(J))*eval(F)     Première itération
X =
0.4055
1.1218
>> X=X-inv(eval(J))*eval(F)     deuxième itération
X =
0.3109
1.2436
```

Le dernier X c'est $X^{(2)}$ et on continue a faire des itérations; jusqu'au cas où eval(f1) = eval(f2)