Chapitre 5

Stabilité

5.1 Définition

lorsque un processus, lui même stable est contrôlé par une boucle d'asservissement, il peut arriver que le système bouclé ne soit pas stable, il est donc indispensable de bien connaitre les conditions d'une bonne stabilité avant de refermer la boucle.

- On dit q'un système est stable si sa réponse impulsionnelle tend vers zéro quand le temps tend vers l'infini ∞.

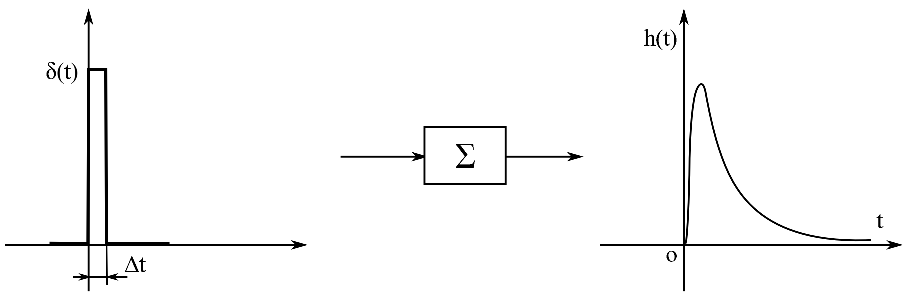

FIGURE 5.1 –

- Un système est dans un état d'équilibre stable si, écarté de cet état, il tend à y revenir, éventuellement en oscillant avec une amplitude décroissante. Il en résulte, qu'en l'absence de signal d'entrée le signal de sortie d'un système stable tend vers zéro quelles que soient les conditions initiales, d'autre part, que l'application d'un signal bornée donne lieu à un signal de sortie borné.

Conclusion : Un système n'est stable que si la partie réelle des racines de son équation caractéristiques est négative, c-à-d si les racines sont situées dans le demi plan gauche, si des racines sont sur l'axe des imaginaires, le système est marginalement stable.

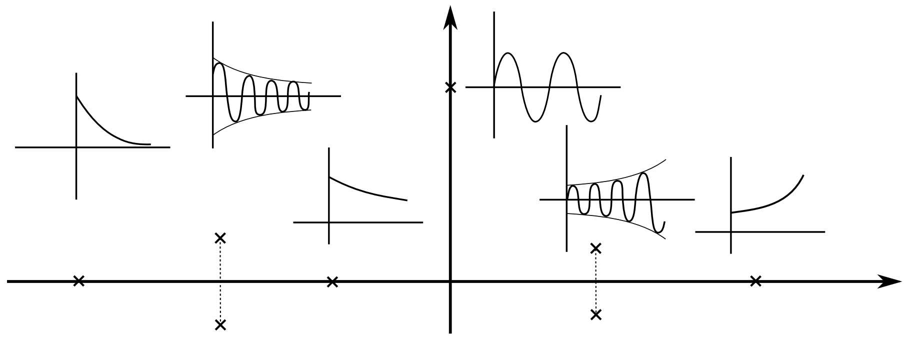

FIGURE 5.2 –

5.2 Critères de stabilité

Une fois élaboré le modèle d'un système, on sait que la partie réelle de toutes les racines de l'équation caractéristiques doit être négative pour que le système soit stable, mais il n'est pas toujours possible de calculer ces racines dés que l'ordre de l'équation est supérieur à deux, heureusement il y a des critères donnent la réponse sans exiger la résolution de l'équation.

Critere de Routh

Ce critère est fonde sur l'examen des termes déduits directement des coefficients de l'équation, il s'énonce ainsi : la partie réelle des racines de l'équation est négative (le système est stable) si les $n+1$ termes de la première colonne du tableau (appelée série de Routh) ont le même signe.

$$
\begin{array}{lll|c|ccc}
\text{On pose} & S^n & \multirow{2}{*}{\{} & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
 & S^{n-1} & & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
 & & & A_1 & A_2 & A_3 & \cdots \\
 & . & & B_1 & B_2 & B_3 & \cdots \\
\text{On détermine} & . & & N_1 & N_2 & N_3 & \cdots \\
 & S^0 & & C_1 & C_2 & C_3 & \cdots
\end{array}
$$

on analyse

TABLE 5.1 – Tableau de Routh

- si le signe des termes de la série est différent, le nombre des racines à partie réelle positive est égal au nombre de changement de signe.
- Rappelons la condition nécessaire mais non suffisante : (tous les coefficients a_i doivent exister et avoir le même signe, supposé positif).

Calculs

$A_1 = \dfrac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$

$A_2 = \dfrac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$

$A_3 = \cdots$
$B_1 = \dfrac{A_1 a_{n-3} - a_{n-1} A_2}{A_1}$
$B_2 = \dfrac{A_1 a_{n-5} - a_{n-1} A_3}{A_1}$
$B_3 = \cdots$

Exemple :

L'équation caractéristique d'un système asservi est : $S^3 + 3S^2 + 2S + K = 0$

1) $K > 0$

2) Le tableau :

$$\begin{array}{c|ccc} S^3 & 1 & 2 & 0 \\ S^2 & 3 & K & 0 \\ S^1 & \dfrac{6-K}{3} & 0 & 0 \\ S^0 & K & 0 & 0 \end{array}$$

TABLE 5.2 – Tableau de Routh(exemple)

Conditions :
$\dfrac{6-K}{3} > 0$ et $K > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < K < 6$

5.2.1 Critère de Hurwitz

On définit les déterminants d'Hurwitz associes à l'équation caractéristiques comme suit :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \left|{}^{a_0}_{0}\right. & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \left|{}^{a_1}_{a_0}\right. & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \end{vmatrix} \tag{5.1}$$

Avec $\Delta_1 = a_{n-1}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$;$\cdots$

Énoncé du critère

Les racines de l'équation caractéristiques sont à partie reelle negative à la condition necessaire et suffisante que :

– Les coefficients a_i $(i = 0, n)$ soient tous positifs.

– Les determinants d'Hurwitz Δ_i soient possitifs.

5.2.2 Exemples

Exemple 5.2.1 $a_3S^3 + a_2S^2 + a_1S + a_0 = 0$

$$\Delta_1 = a_2 > 0\,;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2a_1 - a_0a_3 > 0\,;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} > 0$$

Application : $S^3 - 3S^2 - 3S + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Système instable.

Exemple 5.2.2 Critère de Routh : quelques particularités

$$F(S) = \frac{1}{S^4 + 3S^3 + 2S^2 + 6S + 1}$$

Tous les coefficients de $D(S)$ étant présents et de même signe positif. La décision de stabilité ne peut être prise qu'après examen du tableau de Routh.

$$\begin{array}{c|ccc} S^4 & 1 & 2 & 1 \\ S^3 & 3 & 6 & 0 \\ S^2 & 0 & 1 & 0 \\ S^1 & \infty & \infty & \infty \\ S^0 & - & - & - \end{array}$$