# Chapitre 7

# Précision des systèmes asservis

## 7.1 Généralités

### 7.1.1 Notions de classe d'un système asservi

Il existe plusieurs façon de classer les systèmes asservis, dans le contexte actuel qui est la précision, il convient de les classer selon le nombre d'intégration que comporte leur fonction de transfert en boucle ouverte.

Soit

$$W_1(S)W_2(S) = \frac{K}{S^n}\frac{1 + b_1 S + b_2 S^2 + \cdots}{1 + a_1 S + a_2 S^2 + \cdots}, \quad n = entier \geq 0 \tag{7.1}$$

$n$ est appelé classe du système.

$K$ gain statique.

$n = 0$ aucune intégration $\Rightarrow$ le système est de type zéro.

### 7.1.2 Définition

On dit qu'un système asservi est d'autant plus précis que la différence $e(t)(\varepsilon(t))$ entre la valeur réelle de sa grandeur de sortie et la valeur désirée est réduite ($e(t) \to 0$). En pratique, il en autrement, car :

- La consigne varie : la recherche de minimiser $\varepsilon(t)$, en dépit de ces variations, constitue un problème de suivi (ou de poursuite).
- Un signal de perturbation aléatoire (un bruit) vient se superposer au signal utile en un point de la chaine, le maintien de $\varepsilon(t)$ au voisinage de 0, malgré la perturbation, constitue un problème de régulation.

- L'erreur $\varepsilon(t)$ se décompose en :

1) Une erreur transitoire ou dynamique $\varepsilon_D$.

2) Une erreur permanente ou statique $\varepsilon_S$.

## 7.2 Erreur statique

### 7.2.1 Erreur statique en réponse à un signal d'entrée canonique

On s'intéresse au signal d'erreur, en réponse à une certaine entrée ; la fonction de transfert (entrée, erreur) est donc la suivante (rapport du signal d'activation :

$$\frac{\varepsilon(t)}{X(S)} = \frac{1}{1 + W_1(S)W_2(S)} \tag{7.2}$$

D'après le théorème de la valeur finale, l'erreur statique $\varepsilon_S$ est donnée par la relation suivante :
$\varepsilon_S = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{S\to 0} S\varepsilon(S)$
Donc,

$$\varepsilon_S = \lim S \to 0 \left( S \frac{X(S)}{1 + W_1(S)W_2(S)} \right) \tag{7.3}$$

Cette expression montre que la précision dépond à la fois :

- du système considéré (présence de $W_1(S)W_2(S)$).

- du signal d'entrée appliqué (présence de $X(S)$).

Il est clair que la valeur de $\varepsilon_S$ dépend du nombre $n$ d'intégrateurs que comporte la fonction de transfert en boucle ouverte.
d'après l'équation (7.1) on constate que : $\varepsilon_S = \lim(S \to 0) \dfrac{SS^{-m}S^n}{S^n + K\dfrac{1 + b_1S + b_2S^2 + \cdots}{1 + a_1S + a_2S^2 + \cdots}}$.
Soit

$$\varepsilon_S = \lim(S \to 0) \frac{S^{n-m+1}}{S^n + K} \tag{7.4}$$

Il en résulte, le tableau ci-dessous , qui donne l'erreur statique en fonction de la classe $n$ du système et de l'ordre $m$ du signal d'entrée canonique.

**Remarques**

- Si $n = 0$, $K = K_P$ : constante de position ; $\dfrac{1}{K_P}$ coefficient d'erreur en position.

- Si $n = 1$, $K = K_V$ : constante de vitesse ; $\dfrac{1}{K_V}$ coefficient d'erreur en vitesse

- Si $n = 2$, $K =_A$ : constante d'accélération ; $\dfrac{1}{K_A}$ coefficient d'erreur en accélération.

- L'erreur statique, lorsqu'elle est définie et non nulle, décroit lorsque le gain en boucle ouverte croit.
- On a vu que généralement la stabilité se déteriore lorsque le gain en B.O. croit, cette propriété est connue sous le nom de dilemme *Stabilité-précision*, qui nécessite un compromis.
- L'annulation de l'erreur statique nécessite la présence, dans la chaine :
  - d'au moins une intégration ; s'il s'agit d'une entrée en échelon.
  - d'au moins deux intégrations, S'il s'agit d'une entrée en rampe.

### 7.2.2 Erreur statique en réponse à un signal de perturbation canonique

On montre facilement que :
$\varepsilon(S) = \dfrac{1}{1 + W_1(S)W_2(S)W_3(S)}X(S) - \dfrac{W_2(S)W_3(S)}{1 + W_1(S)W_2(S)W_3(S)}Z(S)$
On suppose, pour fixer les idées, que :

$x(t) = 0$

$z(t)$ : échelon unitaire, donc $Z(S) = \dfrac{1}{S}$.

Il vient $\varepsilon_S = \lim(S \to 0)\,(dfracW_2(S)W_3(S)1 + W_1(S)W_2(S)W_3(S))$

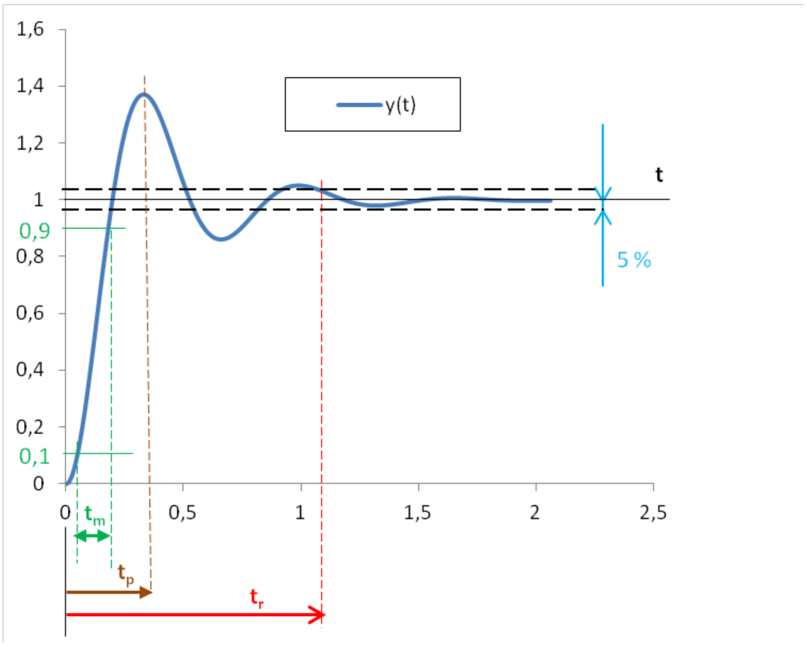
Donc $\varepsilon_S$ sera nul si $W_1$ possède au moins un intégrateur.

## 7.3 Erreur dynamique

L'écart $e(t)$ s'écrit sous la forme : $e(t) = e_T(t) + e_P(t)$, assurer une bonne précision dynamique, c'est garantir un bon comportement de la partie transitoire de l'écart $e(t)$, on entend par cela un amortissement suffisant et une convergence assez rapide de la partie $e_T(t)$. $(\lim(t \to \infty)e_T(t) = 0)$.

### 7.3.1 Remarques

- Le comportement statique de $E(S)$ est entièrement défini par $G(S)$ pour $S = 0$. Cela veut dire que pour $S \neq 0$, $G(S)$ caractérise le comportement dynamique de l'écart.
  d'après $E(S) = \dfrac{X(S)}{1 + W_1(S)W_2(S)}$, $\qquad G(s) = W_1(S)W_2(S)$
  $E(S)$ sera d'autant plus petit que $|G(S)| \gg 1$ c-à-d $\left|\dfrac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}\right| \simeq 1 \simeq W_F(j\omega)$ pour un retour unitaire.
- On déduit que la précision du système est d'autant meilleure que sa bande passante est plus grande.
- La rapidité peut être mesurée par le temps de réponse $t_r$ ou le temps de montée $t_m$ de la réponse indicielle du système




## 7.4 Précision dynamique d'un système du premier ordre à retour unitaire

$$G(S) = \frac{K}{1+\tau S}$$

$$W_F(S) = \frac{G(S)}{1+G(S)} = \frac{K/(1+K)}{1+\dfrac{\tau}{1+K}S}$$

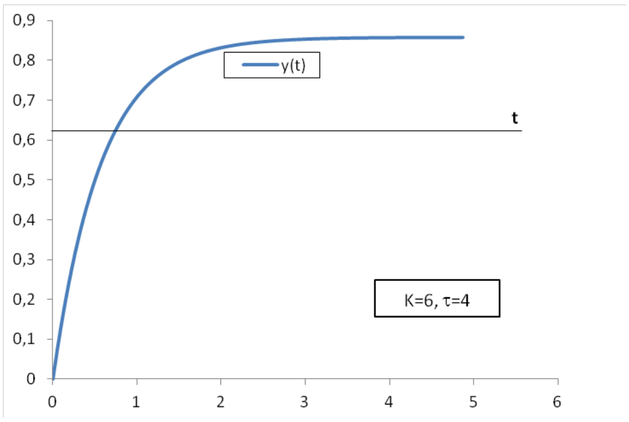
$$W_F(S) = \frac{K_1}{1+\tau_1 S}$$

$$x(t) = u(t) \Rightarrow y(t) = \left(1 - e^{-\dfrac{t}{\tau_1}}\right) K_1; \qquad e(t) = u(t) - y(t)$$

$$e(t) = 1 - \left(1 - e^{-\dfrac{t}{\tau_1}}\right) K_1$$

On remarque :

$t_r = 3\tau$, le système est plus rapide pour $\tau_1 \searrow\searrow \quad \Rightarrow \quad K \nearrow\nearrow$ ($K$ : le gain statique de la boucle ouverte), c'est le dilemme (*stabilité-précision*).




### 7.4.1 Précision dynamique d'un système du deuxième ordre à retour unitaire

Soit

$G(S) = \dfrac{K}{S(1+\tau S}$

$W_F(S) = \dfrac{G(S)}{1+G(S)} = \dfrac{\dfrac{K}{S(1+\tau S)}}{1+\dfrac{K}{S(1+\tau S)}} = \dfrac{1}{\dfrac{\tau}{K}S^2 + \dfrac{1}{K}S + 1} = \dfrac{\omega_n^2}{S^2 + 2\zeta\omega_n^2 S + \omega_n^2}$

$\omega_n = \sqrt{\dfrac{K}{\tau}}, \quad \zeta = \dfrac{1}{2\sqrt{K\tau}}$

La réponse dépend de $(\zeta, \omega_n)$

Pour $x(t) = u(t)$

- $\zeta < 1$

  $y(t) = 1 - Ae^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2} + \varphi\right)$

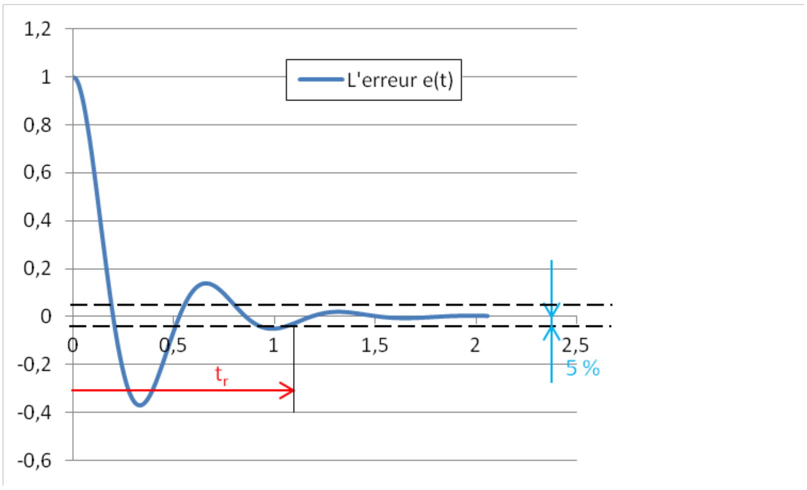
  $A = \dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad \varphi = \arctan\left(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta\right)$

  $\omega_0 = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad \Rightarrow \quad e(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_0 t + \varphi)$

  - Le dépassement : $D(\%) = 100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$

  - Le temps de monté : $t_m = \dfrac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}(\Pi - \arccos\zeta)$

  - Le temps de réponse : $t_r = \dfrac{1}{\omega_n\zeta}\ln\left(\dfrac{100}{n}\right)$




- $\zeta > 1$ : la réponse est non oscillatoire

- $\zeta = 1$ : l'amortissement critique

On définit $Q$ facteur de résonance, $Q = \dfrac{W_{Fmax}}{|W_F(0)|}$
Pour notre système :
$Q = 1$ si $\zeta > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$Q = \dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$ si $\zeta \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\zeta \nearrow \quad \Rightarrow \quad Q \searrow$ ; plus le facteur de résonance est élevé, moins le système est amorti.