الفصل الرابع: جملة معادلات خطية

درسنا في المحاضرات السابقة المصفوفات وأنواعها المعرفة على حقل الأعداد الحقيقية . ندرس في هذه المحاضرة حل جملة m معادلة خطية بـ n مجهول باستخدام طريقة مقلوب المصفوفة، طريقة كرامر، طريقة الحذف المتتالي للمجاهل وطريقة غوص.

1. جملة m معادلة خطية بـ n مجهول:

إن الشكل العام لجملة m معادلة خطية بـ n مجهول هو:

$$(1) \rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \dots \dots . & +\cdots & +\cdots & +\cdots & = \cdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\cdots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

- تسمى العناصر a_{ij} المعاملات أو الأمثال للجملة.
- وتسمى العناصر b_i المقادير الحرة أو الثابتة.
- العناصر x_i المجاهل.
- إذا كانت جميع العناصر b_i معدومة سميت الجملة متجانسة و إذا كان أحدها على الأقل غير معدوم سميت الجملة غير متجانسة.

تسمى المصفوفة : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ مصفوفة المعاملات .

فإذا رمزنا $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ وبالإستفادة من جداء المصفوفات يمكن كتابة جملة المعادالت الخطية (1) بالشكل المختصر : $AX = B \rightarrow (2)$

أن حل جملة المعادالت الخطية (1) يعني إيجاد الشعاع X الذي يحقق (1) وهنا نطرح ثالثة أسئلة :

1) هل هذه الجملة قابلة للحل ام مستحيلة الحل .
2) إذا كانت الجملة قابلة للحل فكم حال لها ؟
3) كيف يمكن إيجاد جميع حلول هذه الجملة ؟

2- حل جملة n معادلة و n مجهول

في هذه الحالة تكون A مصفوفة مربعة ويوجد طرق عديدة لحل الجملة نذكر أهم هذه الطرق:

2.1- طريقة مقلوب المصفوفة: من العلاقة $AX = B$ (2) حيث A مصفوفة المعاملأت و B مصفوفة العمود للمقادير الثابتة فإذا كانت المصفوفة A قابلة للقلب أي $\det A \neq 0$ فانه يوجد لـ A معكوس A^{-1} . لذلك بضرب

طرفي العلاقة (2) من اليسار بـ A^{-1} نجد : $A^{-1}AX=A^{-1}B$ أي $X=A^{-1}B$, ويكون الحل وحيدا. وإذا كانت الجملة متجانسة يكون الحل الوحيد هو الشعاع معدوم . تدعى هذه الطريقة بالطريقة المصفوفية لحل جملة المعادلات الخطية.

<u>مثال 1:</u> حل جملة المعادلات الخطية :

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 1 \\ -2x_1 & -4x_2 & -5x_3 & = 2 \\ 3x_1 & +5x_2 & +6x_3 & = 3 \end{cases}$$

إذا فرضنا أن :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

يمكن ايجاد أن $\det A \neq 0$ و أن : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ و بالتالي فإن :

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

وحسب تساوي مصفوفتين نجد أن الحل هو:

$$x_1 = 13 , \quad x_2 = -12 , \quad x_3 = 4$$

<u>2.2- طريقة كرامر:</u>

أن الصعوبة الطريقة سابقة كانت بإيجاد A^{-1} معكوس المصفوفة A,.

نعرف الأن المحدد التالي Δ_{ii} نحصل عليه باستبدال العمود ذي الرتبة i من محدد المصفوفة A بعمود المقادير الحرة أو الثابتة B .

- إذا كان $\det A \neq 0$ فلجملة المعادلات حل وحيد يعطى بالشكل : $x_i = \frac{\Delta_i}{\det A}, \quad i = 1, \dots, n$
- أما إذا كان $\Delta = 0$ نميز حالتين :

الحالة الأولى : $\Delta_i \neq 0 , i = 1, 2, ... ,n$ عندئذ جملة المعادلات لخطية (1) مستحيلة الحل.

الحالة الثانية : $\Delta_i = 0 , i = 1, 2, ..., n$ عندئذ يوجد لجملة المعادلات الخطية (1)عدد غير منته من الحلول.

تدعى هذه الطريقة بطريقة كرامر.

<u>مثال</u> <u>2:</u> استخدم طريقة كرامر لحل جملة المعادلات الخطية في المثال (1) .

بما أن $\det A \neq 0$ فان لجملة المعادلات حل وحيد يعطى بالشكل : $x_i = \frac{\Delta_i}{\det A}, \quad i = 1,2,3$

أي أن :

$$x_1 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}} = 13, \qquad x_1 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -5 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}} = -12$$

$$4x_3 = x_1 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}} =$$

3- حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة :

في هذه الحالة تكون أعمدة المقادير الحرة أو الثابتة يساوي الصفر وتصبح الجملة بالشكل :

$$(3) \rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2n}x_n & = 0 \\ \dots\dots. & +\cdots & +\cdots & +\cdots & = \cdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\cdots & +a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}$$

أو بالشكل المختصر $AX = 0$

وكما وجدنا سابقا أنه من الواضح أن $x_i = 0$ أيا كان $i = 1, 2, \dots\dots, n$ حل لجملة المعادلات الخطية المتجانسة.

ونشير هنا إلى إنه إذا كان $X_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ ${}_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots . \\ \beta_n \end{pmatrix}$ حلان للجملو (3) فإن كلا من : $X_1 + X_2, \gamma X_2$ هي حلول لهذه الجملة.

وبشكل عام إذا كانت $X_1, X_2 \dots\dots\dots, X_r$ حلوال للجملة فان $Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots\dots\dots + \lambda_r X_r$ يكون حال لها.

ونعلم أيضا أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون لجملة المعادلات الخطية المتجانسة حلولا غير الحل الصفري هو أن يكون محدد الجملة مساويا للصفر.

<u>مثال 3 :</u> ناقش حلول الجملة الخطية المتجانسة التالية بحسب قيم K :

$$\begin{cases} 3x & +Ky & -z & = 0 \\ 2x & +y & +z & = 0 \\ x & +ky & -z & = 0 \end{cases}$$ Tapez une équation ici.

نحسب محدد الجملة :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \boldsymbol{K} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{K} & \mathbf{-1} \end{vmatrix} = \mathbf{2}\boldsymbol{K} - \mathbf{8}$$ Tapez une équation ici.

نلاحظ أن $\Delta \neq 0$ عندما $k \neq 4$ وعندها يكون للجملة الحل الصفري وحيد.

أما من أجل $k = 4$ يكون $\Delta = 0$ وللجملة عدد غير منته من الحلول وتصبح الجملة بالشكل:

$$\begin{cases} 3x & +4y & -z & = 0 \\ 2x & +y & +z & = 0 \\ x & +4y & -3z & = 0 \end{cases}$$ Tapez une équation ici.

نجري تحويلات أولية على مصفوفة ألجملة:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

وتؤول الجملة إلى المعادلتين:

$$\begin{cases} x & +4y & -3z & = 0 \\ & -y & +z & = 0 \end{cases}$$

وبالتالي عدد المجاهيل يزيد بمقدار واحد على عدد المعادلات وبالتالي نفرض متحول حر وليكن z من المعادلة 2 نجد : y=z نعوض في المعادلة الأولى نجد x=-z و منه الحلول هي :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وبالتالي من أجل كل قيمة لـــ z نحصل على حل جديد للجملة.