

SUITE COURS : REPONSE FREQUENTIELLE D'UN SYSTEME

3. REPRESENTATION GRAPHIQUE DE LA REPONSE HARMONIQUE PAR LE LIEU DE NYQUIST

Le diagramme de Nyquist permet d'obtenir une représentation graphique de comportement fréquentiel d'un système sur un graphe unique dans un lieu en coordonnées polaires, des points P de coordonnées $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$ (dans le sens des ω croissants).

Méthode de tracé

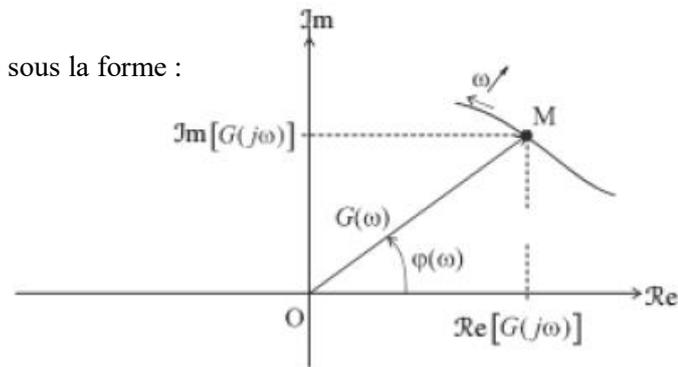
Pour construire le lieu de transfert de Nyquist

- a. il faut tout d'abord écrire le nombre complexe $G(j\omega)$ sous la forme :

$$G(j\omega) = \text{Re}[G(j\omega)] + j\text{Im}[G(j\omega)] = X + jY$$

Et la phase sous la forme :

$$\varphi[G(j\omega)] = \arctg(\text{Im}[G(j\omega)] / \text{Re}[G(j\omega)]) = \arctg(Y/X)$$



- b. déterminer les points P suivants :

P1 : point de départ ($\omega=0$)

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} X, \lim_{\omega \rightarrow 0} Y, \lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi[G(j\omega)]$$

P2 : point d'arrivée ($\omega=\infty$)

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} X, \lim_{\omega \rightarrow \infty} Y, \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi[G(j\omega)]$$

P3 : point d'intersection avec l'axe réel

$Y = 0 \Rightarrow$ on obtient la valeur de ω_1 , on calcul X pour cette valeur et $\varphi[G(j\omega_1)]$

P4 : point d'intersection avec l'axe imaginaire

$X = 0 \Rightarrow$ on obtient ω_2 , on calcule Y pour cette valeur et $\varphi[G(j\omega_2)]$

- c. Lier les points de P1 à P4 pour construire le lieu

Méthode de tracé rapide

Les allures de ces lieux de Nyquist dépendent tout d'abord de la classe(N) de la fonction de transfert.

Basses pulsations :

$$\lim_{w \rightarrow 0} G(w)$$
$$\varphi(w) = N \left(-\frac{\pi}{2} \right)$$

Hautes pulsations :

$$\lim_{w \rightarrow \infty} G(w)$$
$$\varphi(w) = (n - m) \left(-\frac{\pi}{2} \right)$$

3.1. Système du 1^{er} ordre

on a :

$$G(jw) = \frac{K}{1 + j\tau w} = \frac{K(1 - j\tau w)}{(1 + j\tau w)(1 - j\tau w)} = \frac{K(1 - j\tau w)}{1 + \tau^2 w^2}$$

Soit :

$$G(jw) = \frac{K}{1 + \tau^2 w^2} + j \frac{-K\tau w}{1 + \tau^2 w^2} = X + jY$$

et la phase: $\varphi[G(j\omega)] = -\text{arctg}(\tau\omega)$

Point de départ (w=0)

$$\lim_{w \rightarrow 0} X = K$$
$$\lim_{w \rightarrow 0} Y = 0$$
$$\lim_{w \rightarrow 0} \varphi[G(j\omega)] = 0^0$$

Alors Le point de départ **P1** est : $(K, 0)$ avec une phase égal à 0^0 .

Point d'arrivée (w=∞)

$$\lim_{w \rightarrow \infty} X = 0$$
$$\lim_{w \rightarrow \infty} Y = 0$$
$$\lim_{w \rightarrow \infty} \varphi[G(j\omega)] = -90^0$$

Alors Le point d'arrivée **P2** est : (0,0) avec une phase égal à -90°

point d'intersection avec l'axe réel

$Y = 0 \Rightarrow$ on obtient la valeur de $w_1 = 0$, alors pour cette valeur on obtient $X = K$ et $\varphi[G(jw_1)] = 0$

Alors le point d'intersection avec l'axe réel P3 c'est le même point P1.

point d'intersection avec l'axe imaginaire

$X = 0 \Rightarrow$ la valeur de w_2 n'existe pas, alors les valeurs de Y et de $\varphi[G(jw_2)]$ n'existent pas aussi.

Alors le point d'intersection avec l'axe imaginaire P4 n'existe pas.

On prend un autre point :

A la pulsation de cassure $\omega_c = 1/\tau$ on a $X = \frac{K}{2}$, $Y = -\frac{K}{2}$ et $\varphi[G(jw_c)] = -45^\circ$.

Alors on peut dresser le tableau suivant pour différent valeur de w:

w	0	$\omega_c = 1/\tau$	∞
X	K	$\frac{K}{2}$	0
Y	0	$-\frac{K}{2}$	0
$ H(jw) = \sqrt{X^2 + Y^2}$	K	$\frac{K}{\sqrt{2}}$	0
$\varphi[G(jw)]$	0°	-45°	-90°

Enfin ,Le lieu de Nyquist d'un système du premier ordre est un demi-cercle de centre (K/2,0) et de rayon K/2 comme le montre la Figure 8.

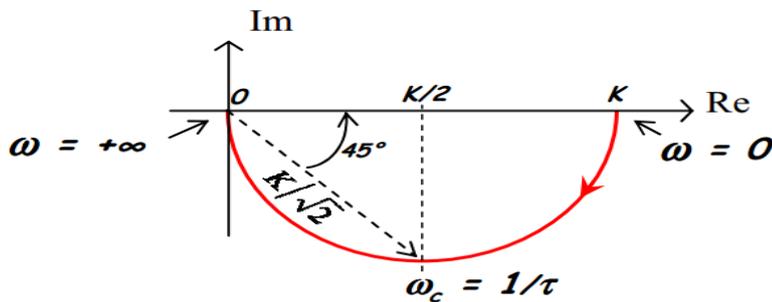


Figure 8

3.2. Système du 2eme ordre

$$G(jw) = \frac{K}{1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2 + j2\xi\left(\frac{w}{w_n}\right)}$$

$$G(jw) = \frac{K\left(1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)}{\left(1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)^2 + 4\xi^2\left(\frac{w}{w_n}\right)^2} + j \frac{-2K\xi\left(\frac{w}{w_n}\right)}{\left(1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)^2 + 4\xi^2\left(\frac{w}{w_n}\right)^2} = X + jY$$

$$\varphi[G(j\omega)] = -\arctg\left(\frac{2\xi\left(\frac{w}{w_n}\right)}{1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2}\right)$$

Point de départ (w=0)

$$\lim_{w \rightarrow 0} X = K$$

$$\lim_{w \rightarrow 0} Y = 0$$

$$\lim_{w \rightarrow 0} \varphi[G(j\omega)] = 0^\circ$$

Alors Le point de départ **P1** est : (K, 0) avec une phase égal à 0°

Point d'arrivée (w=∞)

$$\lim_{w \rightarrow \infty} X = 0$$

$$\lim_{w \rightarrow \infty} Y = 0$$

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \varphi[G(j\omega)] = -180^\circ$$

Alors Le point d'arrivée **P2** est : (0,0) avec une phase égal à -180°

point d'intersection avec l'axe réel

$Y = 0 \Rightarrow$ on obtient la valeur de $w_1 = 0$, alors pour cette valeur on obtient $X = K$ et $\varphi[G(jw_1)] = 0$

Alors le point d'intersection avec l'axe réel P3 c'est le même point P1.

point d'intersection avec l'axe imaginaire

$X = 0 \Rightarrow \left(1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right) = 0 \Rightarrow w = w_2 = w_n$ alors pour cette valeur on obtient $Y = -\frac{K}{2\xi}$ et $\varphi[G(jw_2)] = -90^\circ$

Alors le point d'intersection avec l'axe imaginaire P4 est : $\left(0, -\frac{K}{2\xi}\right)$ avec une phase égal à -90°

Alors on peut dresser le tableau suivant pour déférent valeur de w:

w	0	$w_c = w_n$	∞
X	K	0	0
Y	0	$-\frac{K}{2\xi}$	0
$ H(jw) = \sqrt{X^2 + Y^2}$	K	$\frac{K}{2\xi}$	0
$\varphi[G(jw)]$	0^0	-90^0	-180^0

La figure 9 représente le diagramme de Nyquist d'un système de 2^{ème} ordre.

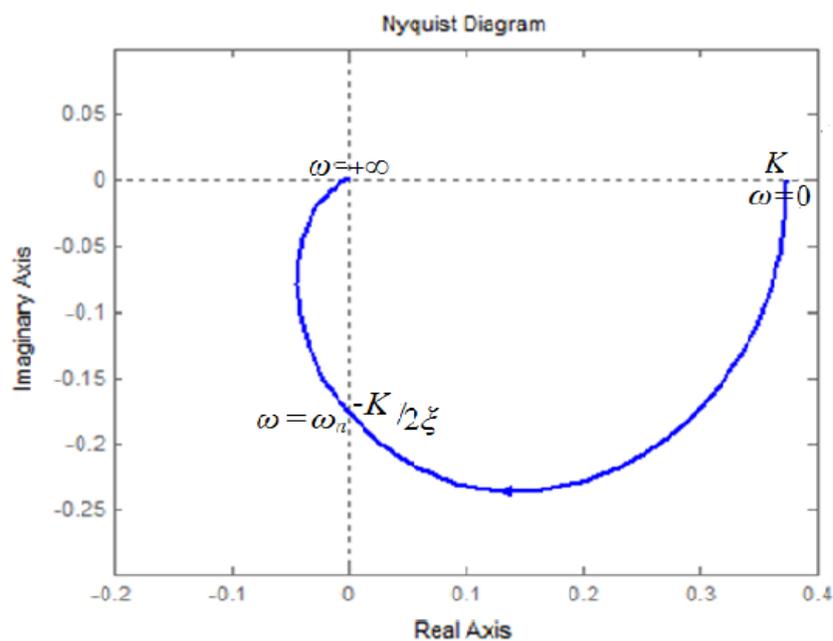


Figure 9

3.3. Critère de stabilité

Le critère de Nyquist permet de déterminer la stabilité d'un système bouclé sur la base de sa réponse harmonique en boucle ouverte.

a/stabilité absolue :

La condition nécessaire et suffisante de stabilité d'un système asservi linéaire et que son lieu de transfert en boucle ouverte, parcouru de $\omega = -\infty$ à $\omega = +\infty$, entoure le point critique $(-1, 0)$ dans le sens trigonométrique un nombre de fois égal au nombre de pôles instables de la fonction de transfert en boucle ouverte. Étant donné un système asservi, défini par sa fonction de transfert en boucle ouverte ($G_{BO}(p)$). La relation : $Z = P - N$ donne le nombre Z de zéros instables de l'équation

Caractéristique $1 + G_{BO}(p) = 0$ et donc de pôles instables de la FTBF(p), avec :

P : Nombre de pôles instables de $G_{BO}(p)$.

N : Nombre de tours que fait le lieu complet de Nyquist (ω variant de $-\infty$ à $+\infty$) autour du point Critique $(-1,0)$ dans le sens trigonométrique.

Le système est **stable** à condition que $Z = 0 \rightarrow P = N$.

Exemple : soit un système à retour unitaire dont :

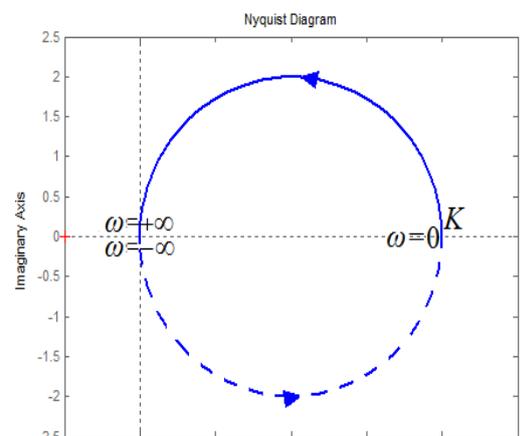
$$G(p) = \frac{K}{1-\tau p} \quad (\tau > 0). \text{ Discutons sa stabilité suivant les valeurs de } K$$

➤ $K > 0$

La $G_{BO}(p)$ à un pôle instable $p = \frac{1}{\tau} \Rightarrow P = 1$.

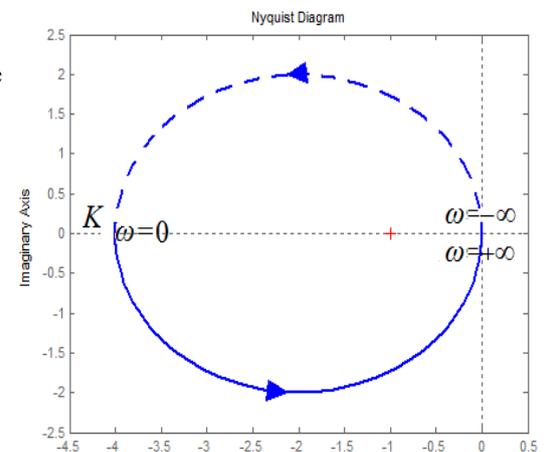
Le nombre de tours autour du point $(-1, 0)$: $N = 0$.

$Z = P - N = 1 \neq 0 \rightarrow$ Ce système est instable en boucle ouverte et instable en boucle fermée.



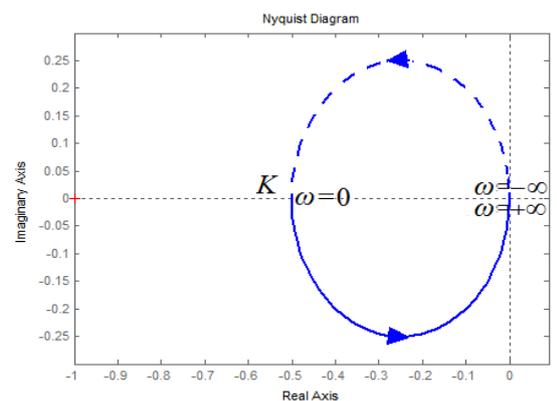
➤ $K < -1$

$P = 1, N = 1, Z = P - N = 0 \rightarrow$ Ce système est stable en boucle ouverte et en boucle fermée.



➤ $-1 < K < 0$

$P = 1, N = 0, Z = 1 \neq 0 \rightarrow$ Ce système est instable en boucle ouverte et instable en boucle fermée.



b/stabilité relative

Marges de stabilité :

La marge de phase M_φ est : $M_\varphi = 180^\circ + \varphi(\omega_{c0})$

La marge de gain M_G est : $M_G = \frac{1}{M(\omega_\pi)}$

Pour qu'un système soit **stable**, il faudrait que : $M_G > 0$ et $M_\varphi > 0$.

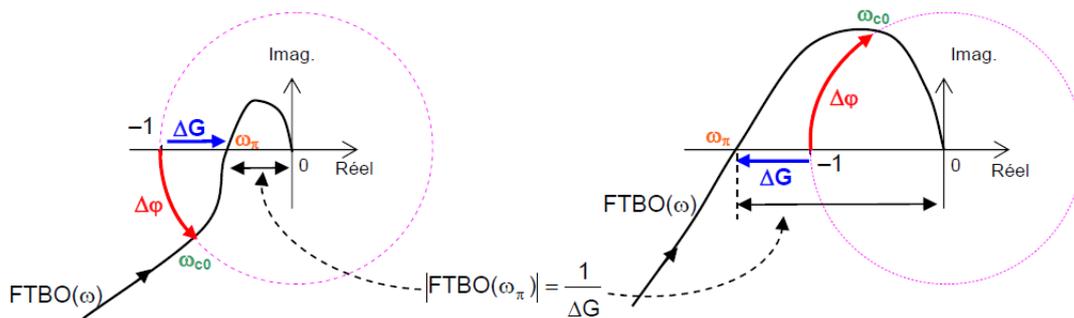


Illustration des marges de gain et de phase sur le lieu de Nyquist (cas d'un système stable)

Illustration des marges des gain et de phase sur le lieu de Nyquist (cas d'un système instable)

Figure 10

Exemple : soit le système suivant : $H(p) = \frac{(1+0.33p)}{(1+0.01p)(1+0.003p)}$

Termes \ ω_c	3	100	333	
$(1 + 0.33p)$	0 (0°)	+20 (+90°)		
$1/(1 + 0.01p)$	0 (0°)		-20 (-90°)	
$1/(1 + 0.003p)$		0 (0°)	-20 (-90°)	
$H(p)$	0 (0°)	+20 (+90°)	0 (0°)	-20 (-90°)

