République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE
DÉPARTEMENT DE Biologie

Correction TD 03 :

Le 10/04/2020

Par
Dr : CHALA ADEL

BioStatistiques

2019-2020

Je dédie ce travail. . . . .
A mes parents ils m'ont tous,
avec leurs moyens, soutenu et donné
la force d'aller toujours
plus loin.

Table des matières

Chapitre 1

Questions

TD N:03 Les lois Usuelles des Probabilités (Discrètes)

Exercice 01 :

Une urne contient des boules : 20 blanches et 15 boules noires. La proportion de blanches est p. Les tirages se font avec remise, ainsi la proportion de boules blanches ne changent jamais.

On tire au hasard une boule du cette urne.

1. Soit X la variable aléatoire qui vaut 1, si on tire une boule blanche et 0 sinon.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?

b) Calculer l'espérance pour la variable aléatoire X ?

c) Calculer la variance pour la variable aléatoire X ?

2. Soit S la variable .aléatoire indiquant le nombre de boules blanches tirées sur 08 tirages.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire S ?

b) Calculer la probabilité d'avoir exactement 04 boules blanches.

c) Quelle est l'espérance $E(S)$,

d) Quelle est la variance de la variable aléatoire S.

Exercice 02 :

On joue a pile ou face. Si on obtient pile, on gagne 10 Dinars. Si on obtient face, on perd 10 Dinars.

On considère une série de 10 lancers.

1. Si la pièce est non truquée (la probabilitée d'avoir pile et la probabilité d'avoir face est la même) :

a) Déterminer la loi de probabilité pour cette experience.

b) Quelle est la probabilité de gagner 100 Dinars ?

c) Quelle est la probabilité de gagner 80 Dinars ?

d) Quelle est l'espérance de gain ?

2. Si la pièce est l'egérement truquée et tombe sur face dans 60% des cas.

a) Quelle est la probabilité de gagner 100 Dinars ?

b) Quelle est l'espérance de gain ?

Exercice 03 :

Dans un atelier, le nombre d'accidents au cours d'un mois Avril est une variable .aléatoire qui suit une loi Binomiale du paramètre $B\,(30;\ 0,002)$.

Calculer la probabilité des evènements suivants :

1. Il n'y a pas d'accidents au cours d'un mois Avril.

2. Il y a exactement 01 seules accident au cours de mois Avril.

2. Il y a exactement 4 accidents au cours de mois Avril.

3. Il a plus de 2 accidents au cours de mois Avril.

Exercice 04 :

Dans un test au Laboratoire de Pasteur en série, 0,8% des tests présentent le CoronaVirus.

1/ Quelle est la probabilités pour que dans un contrôle portant sur 25 personnes, il y ait exactement 4 personne porteur de la virus ?

2/ Quelle la probablité d'avoir tous les personnes (25) sont malades ?

3/ On note par T la variable aléatoire qui représent la première résultat positive parmi les 25 personnes.

a) Déterminer la loi de probabilité pour la variable aléatoire T.

b) Quelle est la probabilité pour que $T = 10$?

Exercice 05 :

Un avion peut accueillir 20 personnes ; des statistiques montrent que 25% clients ayant réservé ne viennent pas.

Soit X la variable aléatoire : «nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20».

a) Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que la forme générale)

b-c) Quelle est son espérance, son écart-type ? d) Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?

Chapitre 2

Réponse :

Exercice 01 :

1/ a) La loi de probabilité de X.

Etape 01 : Soient Ω évènement des tous les résultats possibles, alors

$$\Omega = \{\text{Boules blanches, Boules noirs}\}.$$

A évènement de Ω, alors

$$A = \{\text{Boules blanches}\}.$$

X une variable aléatoire qui représente les résultats d'une experience.

Etape 02 :On note par 01 (un) pour la variable aléatoire X si A est réalise (tiré une boule blanche).

On note par 0 (zéro) pour la variable aléatoire X si A n'est pas réalise (ne pas tiré une boule blanche).

Etape 03 : La probabilité de réussite l'évènement A c'est

$$P(A) = P(X = 1) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7} = p$$

La probabilité de l'echec l'évènement A c'est

$$P\left(\overline{A}\right) = P(X = 0) = \frac{15}{35} = \frac{3}{7} = q$$

avec $p + q = 1$.

Conclusion La variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{4}{7}\right)$.

b) Espérance pour la variable aléatoire X est donné par

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{2} kP(X=k), \text{ avec } k \in \{0,1\} \\ &= 1P(X=1) + 0P(X=0) \\ &= 1\left(\frac{4}{7}\right) + 0\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

c) Moment d'ordre deux pour la variable aléatoire X est donné par

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \sum_{i=1}^{2} k^2P(X=k), \text{ avec } k \in \{0,1\} \\ &= 1^2P(X=1) + 0^2P(X=0) \\ &= 1^2\left(\frac{4}{7}\right) + 0^2\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Variance pour la variable aléatoire X est donné par

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left(X^2\right) - E^2(X) \\ &= \sum_{i=1}^{2} k^2P(X=k) - \left(\sum_{i=1}^{2} kP(X=k)\right)^2 \\ &= \frac{4}{7} - \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{4}{7}\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{12}{49}. \end{aligned}$$

2/ a) La loi de probabilité pour la variable aléatoire S :

En suivant les étapes

Etape 01 : Soient Ω évènement des tous les résultats possibles, alors

$$\Omega = \{\text{Boules blanches, Boules noirs}\}.$$

A évènement de Ω, alors

$$A = \{\text{Boules blanches}\}.$$

X_i une variable aléatoire qui représente les résultats de la i^{eme} experience, avec $i \in \{1, 2, 3, ..., 8\}$.

Etape 02 :On note par 01 (un) pour la variable aléatoire X_i si A est réalise (tiré une boule blanche)

On note par 0 (zéro) pour la variable aléatoire X_i si A n'est pas réalise (ne pas tiré une boule blanche).

Etape 03 : La probabilité de réussite l'évènement A c'est

$$P(A) = P(X_i = 1) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7} = p$$

La probabilité de l'echec l'évènement A c'est

$$P(\overline{A}) = P(X_i = 0) = \frac{15}{35} = \frac{3}{7} = q$$

avec $p + q = 1$.

Etape 04 : On note par S la somme des résultats obtenues par l'experiance de Bernoulli durant 8 fois de répétitions, d'où S représente le nombre de succès pour l'évènement A dans 08 répititions d'experiences de Bernoulli,

$$S = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_8.$$

Alors pour déterminer la loi de probabilité pour la variable aléatoire S, on peut calculer directement la probabilité pour que ce nombre égal à k, on a

$$P(S = k) = C_8^k p^k (1-p)^{8-k}, \text{ avec } C_8^k = \frac{8!}{k!(8-k)!},$$
$$\text{et } 8! = 8(7)(6)...2 \times 1,$$
$$\text{et } k \in \{1, 2, 3, ..., 8\}.$$

Conclusion La variable aléatoire S suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p) = \mathcal{B}\left(8, \frac{4}{7}\right)$.

b) La probabilité pour que le nombre des boules blanches c'est exactement 04 boules :

$$\begin{aligned} P(S = 4) &= C_8^4 \left(\frac{4}{7}\right)^4 \left(1 - \frac{4}{7}\right)^{8-4}, \text{ avec } C_8^4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70, \\ &= 70 \left(\frac{4}{7}\right)^4 \left(\frac{3}{7}\right)^4 = 0,151 = 15,1\%. \end{aligned}$$

c) Espérance de la variable aléatoire S

$$\begin{aligned} E(S) &= E\left(\sum_{i=1}^{8} X_i\right) = \sum_{i=1}^{8} E(X_i) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + ... + E(X_8) \\ &= \frac{4}{7} + \frac{4}{7} + \frac{4}{7} + ... + \frac{4}{7} \\ &= 8\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{32}{7}. \end{aligned}$$

d) La vriance de la variable aléatoire S

$$\begin{aligned} Var\left(S\right) &= Var\left(\sum_{i=1}^{8} X_i\right) = \sum_{i=1}^{8} Var\left(X_i\right) \\ &= Var\left(X_1\right) + Var\left(X_2\right) + Var\left(X_3\right) + ... + Var\left(X_8\right) \\ &= \frac{12}{49} + \frac{12}{49} + \frac{12}{49} + ... + \frac{12}{49} \\ &= 8\left(\frac{12}{49}\right) = \frac{96}{49}. \end{aligned}$$

Exercice 02 :

1/ Si la pièce est non truquée c'est à dire équilibrée.

a) Pour déterminer la loi de probabilité pout cette experience, on doit suivre les étapes ci-dessous :

Etape 01 : Soient Ω évènement des tous les résultats possibles, alors

$$\Omega = \{\text{Pile , Face}\}.$$

A évènement de Ω, alors

$$A = \{\text{Pile}\}.$$

X_i une variable aléatoire qui représente les résultats de la i^{eme} experience, avec $i \in \{1, 2, 3, ..., 10\}$.

Etape 02 :On note par 01 (un) pour la variable aléatoire X_i si A est réalise (obtenir une pile), avec $i \in \{1, 2, 3, ..., 10\}$

On note par 0 (zéro) pour la variable aléatoire X_i si A n'est pas réalise (obtenir une face), avec $i \in \{1, 2, 3, ..., 10\}$

Etape 03 : La probabilité de réussite l'évènement A c'est

$$P\left(A\right) = P\left(X_i = 1\right) = \frac{1}{2} = p$$

La probabilité de l'echec l'évènement A c'est

$$P\left(\overline{A}\right) = P\left(X_i = 0\right) = \frac{1}{2} = q$$

avec $p + q = 1$.

Etape 04 : On note par S la somme des résultats obtenues par l'experiance de Bernoulli durant 10 fois de répétitions, d'où S représente le nombre de succès pour l'évènement A dans 10 répititions d'experiences de Bernoulli,

$$S = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_{10}.$$

Alors pour déterminer la loi de probabilité pour la variable aléatoire S, et on calcule la probabilité pour que ce nombre égal à k, on a

$$\begin{aligned} P(S=k) &= C_{10}^{k} p^{k}(1-p)^{10-k}, \text{ avec } C_{10}^{k} = \frac{10!}{k!(10-k)!}, \\ &\text{et } 10! = 10(9)(8)\ldots 2\times 1, \\ &\text{et } k \in \{1,2,3,\ldots,10\}. \end{aligned}$$

Conclusion La variable aléatoire S suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p) = \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

b) La probabilité pour gagner 100 Dinars, c'est à dire que l'évènement A sera réalisé 10 fois succussivement, alors

$$\begin{aligned} P(S=10) &= C_{10}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-10}, \text{ avec } C_{10}^{10} = \frac{10!}{10!(10-10)!} = 1, \\ &= 1\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0,00097. \end{aligned}$$

c) Espérance de gain

$$\begin{aligned} E(S) &= E\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = \sum_{i=1}^{10} E(X_i) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \ldots + E(X_{10}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} \\ &= 10\left(\frac{1}{2}\right) = 5. \end{aligned}$$

Remarque : Pour celculer $E(X)$ il suffit d'appliquer la méthode analogue que celle à exercice 02.

2/ a) Si la pièce est truquée c'est à dire non équilibrée, alors

$$P(A) = P(X_i = 1) = 60\% = 0,6 = p$$

La probabilité de l'echec l'évènement A c'est

$$P\left(\overline{A}\right) = P(X_i = 0) = 40\% = 0,4 = q$$

avec $p+q=1$, et $A = \{\text{Pile}\}$. La variable aléatoire S suit la loi de binomiale $\mathcal{B}(n;p) = \mathcal{B}(10; 0,6 = 60\%)$.

Alors

$$P(S=10) = C_{10}^{10}(0,6)^{10}(1-0,6)^{10-10}, \text{ avec } C_{10}^{10} = \frac{10!}{10!\,(10-10)!} = 1,$$
$$= 1\,(0,6)^{10}\,(0,4)^{0} = (0,6)^{10} = 0,0060.$$

b) Espérance de gain

$$\begin{aligned} E(S) &= E\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = \sum_{i=1}^{10} E(X_i) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + ... + E(X_{10}) \\ &= 0,6 + 0,6 + 0,6 + ... + 0,6 \\ &= 10\,(0,6) = 6. \end{aligned}$$

Exercice 03 :

On note par S le nombre des accidentes de travail au cours d'un mois Avril, alors S suit la loi binomiale $\mathcal{B}(30; 0,002) = \mathcal{B}(n; p)$, avec

$$P(A) = P(X_i = 1) = 0,2\% = 0,002 = p$$

La probabilité de l'echec l'évènement A c'est

$$P(\overline{A}) = P(X_i = 0) = 1 - 0,2\% = 0,998 = q$$

avec $p + q = 1$, et $A = \{\text{Accident de travail}\}$.

Alors on calcul les probabilités suivantes

1/La probabiliré d'avoir 0 accident

$$P(S=0) = C_{30}^{0}(0,002)^{0}(1-0,002)^{30-0}, \text{ avec } C_{30}^{0} = \frac{30!}{0!\,(30-0)!} = 1,$$
$$= 1\,(0,002)^{0}\,(0,998)^{30} = 0,941.$$

2/La probabiliré d'avoir 4 accidents

$$P(S=4) = C_{30}^{4}(0,002)^{4}(1-0,002)^{30-4}, \text{ avec } C_{30}^{4} = \frac{30!}{4!\,(30-4)!} = 27405,$$
$$= 27405\,(0,002)^{4}\,(0,998)^{26} = 0,00000042.$$

3/ La probabiliré d'avoir 01 seule accident

$$P(S=1) = C_{30}^{1}(0,002)^{1}(1-0,002)^{30-1}, \text{ avec } C_{30}^{1} = \frac{30!}{1!\,(30-1)!} = 30,$$
$$= 30\,(0,002)^{1}\,(0,998)^{29} = 0,056.$$

4/ La probabiliré d'avoir plus de 02 accidents c'est à dire $(S \geq 2)$, alors il vient que

$$\begin{aligned} P(S \geq 2) &= 1 - P(S < 2) = 1 - [P(S=0) + P(S=1)] \\ &= 1 - [0,941 + 0,056] = 0,0003. \\ \text{Car } P(B) &= 1 - P\left(\overline{B}\right). \end{aligned}$$

Exercice 04 :

1/ Il faut d'abord établir la loi de probabilité qui couvre cette expérience, alors

Etape 01 : Soient Ω évènement des tous les résultats possibles, alors

$$\Omega = \{\text{résultat positive, résultat négative}\}.$$

A évènement de Ω, alors

$$A = \{\text{résultat positive}\}.$$

X_i une variable aléatoire qui représente les résultats de la i^{eme} experience, avec $i \in \{1, 2, 3, ..., 25\}$.

Etape 02 :On note par 01 (un) pour la variable aléatoire X si A est réalise (résultat +).

On note par 0 (zéro) pour la variable aléatoire X si A n'est pas réalise (résultat -).

Etape 03 : La probabilité de réussite l'évènement A c'est

$$P(A) = P(X_i = 1) = 0,8\% = 0,008 = p$$

La probabilité de l'echec l'évènement A c'est

$$P\left(\overline{A}\right) = P(X_i = 0) = 1 - 0,8\% = 0,992 = q$$

avec $p + q = 1$.

Etape 04 : On note par S la somme des résultats obtenues par l'experiance de Bernoulli durant 25 fois de répétitions, d'où S représente le nombre de succès pour l'évènement A dans 25 répititions d'experiences de Bernoulli,

$$S = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_{25}.$$

Alors pour déterminer la loi de probabilité pour la variable aléatoire S, il suffit de calculer la probabilité pour que ce nombre égal à k, on a

$$\begin{aligned} P(S=k) &= C_{25}^{k} p^{k} (1-p)^{25-k}, \text{ avec } C_{25}^{k} = \frac{25!}{k!(25-k)!}, \\ &\text{et } 25! = 25(24)(23)...2 \times 1, \\ &\text{et } k \in \{1,2,3,...,25\}. \end{aligned}$$

Conclusion La variable aléatoire S suit la loi de binomiale $\mathcal{B}(25, 0,008)$.

La probabilité pour que le nombre des résulalts + c'est exactement 04 porteurs de la virus :

$$\begin{aligned} P(S=4) &= C_{25}^{4}(0,008)^{4}(1-0,008)^{25-4}, \text{ avec } C_{25}^{4} = \frac{25!}{4!(25-4)!} = 12650, \\ &= 12650(0,008)^{4}(0,992)^{21} = 0,00004377. \end{aligned}$$

2/ La probabilité de trouuvé 10 personnes malades

$$\begin{aligned} P(S=10) &= C_{25}^{10}(0,008)^{10}(1-0,008)^{25-10}, \text{ avec } C_{25}^{10} = \frac{25!}{10!(25-10)!} = 3268760 \\ &= 0,00000000000000311142. \end{aligned}$$

3/ On note par T la variable aléatoire qui représent la première résultat positive parmi les 25 personnes.

a) Pour cela on doit suivre les mêmes étapes :

Etape 01 : Soient Ω évènement des tous les résultats possibles, A évènement de Ω, et X_i une variable aléatoire qui représente les résultats d'une expériance de Bernoulli, avec $i \in \{1,2,3,...,25\}$.

Etape 02 :On note par 01 (un) pour la variable aléatoire X_i si A est réalise (résultat est +).

On note par 0 (zéro) pour la variable aléatoire X_i si A n'est pas réalise (résultat est -).

Etape 03 : La probabilité de réussite l'évènement A dans la i^{eme} experience c'est

$$P(A) = P(X_i = 1) = 0,008$$

La probabilité de l'echec l'évènement A c'est

$$P(\overline{A}) = P(X_i = 0) = 0,992.$$

avec $p + q = 1$.

Etape 04 : On note par T le premier temps pour avoir le succès de l'évènement A $(+)$ par l'experience de Bernoulli durant 25 fois de répétitions, on pose

$$\begin{aligned}
P(T=k) &= P(\text{le premier temps pour avoir le succès de l'évènement } A) \\
&= P(\text{Dans la 1er experience le résulalt est -} \\
&\quad \text{Dans la 2eme experience le résulalt est -} \\
&\quad \text{Dans la 3eme experience le résulalt est -} \\
&\quad .... \\
&\quad \text{Dans la k}^{\text{em}} \text{ experience le résulalt est +}) \\
&= P\left(\overline{A_1} \text{ et } \overline{A_2} \text{ et} \overline{A_3} \text{ et} \overline{A_4} \text{ et.... et } A_k\right) \\
&= P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap .... \cap A_k\right) \\
&= P\left(\overline{A_1}\right) \times P\left(\overline{A_2}\right) \times P\left(\overline{A_3}\right) \times P\left(\overline{A_4}\right) \times ... \times P(A_k) \\
&= P(X_1=0) \times P(X_2=0) \times P(X_3=0) \times P(X_4=0) ... \times P(X_k=1) \\
&= q \times q \times q \times q ... \times p \\
&= p \times q^{k-1} = (0,008)(0,992)^{k-1}
\end{aligned}$$

Conclusion La variable aléatoire T suit la loi de gémétrqiue $\mathcal{G}(p)$.

b) La probabilité pour que $T=10$ est donné par

$$P(T=10) = (0,008)(0,992)^{10-1} = (0,008)(0,992)^9 = 7,442 \times 10^{-3}.$$

Exercice 05 :

a) Pour déterminer la loi de probabilité, il suffit de suivre les étapes

Etape 01 : Soient Ω évènement des tous les résultats possibles, pour $n=20$ on peut établir que

$$\Omega = \{\text{personnes ayant réservé ne reviennent pas, personnes ayant réservé et reviennent }\}.$$

A évènement de Ω, alors

$$A = \{\text{personnes ayant réservé et reviennent }\}.$$

X_i une variable aléatoire qui représente les résultats de la i^{eme} experience, avec $i \in \{1,2,3,...,20\}$.

Etape 02 :On note par 01 (un) pour la variable aléatoire X_i si A est réalise (personnes ayant réservé et reviennent)

On note par 0 (zéro) pour la variable aléatoire X_i si A n'est pas réalise (personnes ayant réservé et ne reviennent pas).

Etape 03 : La probabilité de réussite l'évènement A c'est

$$P(A) = P(X_i = 1) = 75\% = 0,75 = p$$

La probabilité de l'echec l'évènement A c'est

$$P\left(\overline{A}\right) = P(X_i = 0) = 25\% = 0,25 = q$$

avec $p + q = 1$.

Etape 04 : On note par S la somme des résultats obtenues par l'experiance de Bernoulli durant 20 fois de répétitions, d'où S représente le nombre de succès pour l'évènement A dans 20 répititions d'experiences de Bernoulli,

$$S = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_{20}.$$

Alors pour déterminer la loi de probabilité pour la variable aléatoire S, on calcul directement la probabilité pour que ce nombre égal à k, on a

$$\begin{aligned} P(S = k) &= C_{20}^k p^k (1-p)^{20-k}, \text{ avec } C_{20}^k = \frac{20!}{k!(20-k)!}, \\ &\text{et } 20! = 20(19)(18)...2 \times 1, \\ &\text{et } k \in \{1, 2, 3, ..., 20\}. \end{aligned}$$

Conclusion La variable aléatoire S suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p) = \mathcal{B}(20; 0,75)$.

b) Espérance de la variable aléatoire S

$$\begin{aligned} E(S) &= E\left(\sum_{i=1}^{20} X_i\right) = \sum_{i=1}^{20} E(X_i) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + ... + E(X_{20}) \\ &= 0,75 + 0,75 + 0,75 + ... + 0,75 \\ &= 20(0,75) = 15. \end{aligned}$$

c) La vriance de la variable aléatoire S

$$\begin{aligned} Var(S) &= Var\left(\sum_{i=1}^{20} X_i\right) = \sum_{i=1}^{20} Var(X_i) \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) + ... + Var(X_{20}) \\ &= 0,1875 + 0,1875 + 0,1875 + ... + 0,1875 \\ &= 20(0,1875) = 3,75. \end{aligned}$$

d) La probabilité pour que on a exactement 15 personnes qui ayant réservé et reviennent après :

$$\begin{aligned} P(S=15) &= C_{20}^{15}(0,75)^{15}(1-0,75)^{20-15}, \text{ avec } C_{20}^{15}=\frac{20!}{15!\,(20-15)!}=15504, \\ &= 15504\,(0,75)^{15}\left(\frac{3}{7}\right)^{4}=0,2023=20,23\%. \end{aligned}$$