Université Mohamed khider Biskra

Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de vie
Département de mathématiques
Module: Martingale à temps discret
Année:2019/2020

TD2. Martingale à temps discret

Exercice 1:(Changement de tribus)
1) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une sous-martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ est aussi une sous-martingale pour la filtration canonique $(\sigma(X_1, X_2, ..., X_n))_{n\geq 1}$.
2) Que dire d'une martingale (resp. d'une sous-martingale, d'une sur-martingale) par rapport à une filtration constante?

Exercice2:(Exemples de Martinguales)
1-Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r.indépendantes, de même espérance m finie. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + ... + X_n$. Montrer $(S_n)_{n\geq 1}$ est une sous-martingale adapté à la filtration naturelle de $(X_n)_{n\geq 1}$, (resp. une martingale, une sur-martingale) si $m > 0$,(resp. $m = 0$, $m < 0$).
2-Soit X une v.a.r. telle que $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$ et soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ défini par $X_n = E(X/\mathcal{F}_n)$ est une martingale (une telle martingale est dite martingale régulière ou fermée).

Exercice 3: Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux sous-martingales.
1) Montrere que $(|X_n|)_{n\geq 1}$ est une sous-martingale.
2) Si $\forall n \geq 1$, $\mathbb{E}(X_n^2) < +\infty$, montrer que $(X_n^2)_{n\geq 1}$ est une sous-martingales.
3) Montrere que $(X_n \wedge Y_n)_{n\geq 1}$ est une sous-martingale et que et $(X_n \vee Y_n)_{n\geq 1}$ est une sur-martingale.

Exercice 4: Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une sur-martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ et $(\beta_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives et bornée, β_n étant $\mathcal{F}_{n-1}-$mesurable pour $n \geq 1$ et β_0 constante. On pose Z_0, pour tout $n \geq 1$, $Z_n = X_n - X_{n-1}$ et $Y_n = \beta_0 Z_0 + ... + \beta_n Z_n$. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

Exercice 5:(Martingale équidistribuée) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une sous-martingale telle que toutes les v.a.r. X_n aient même loi.
1-Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une martingale.
2-Montrer que, pour tout réel a, $(X_n \wedge a)_{n\geq 1}$ et $(X_n \vee a)_{n\geq 1}$sont des martingales. (On note $\wedge$ et $\vee$ pour inf et sup.)
3-En déduire que, si $n > m$ pour tout réel a, sur l'ensemble $\{X_m \geq a\}$, X_n est p.s supérieur ou égale à a.
4- En déduire que $X_1 = ... = X_n = ...$ P-p.s.