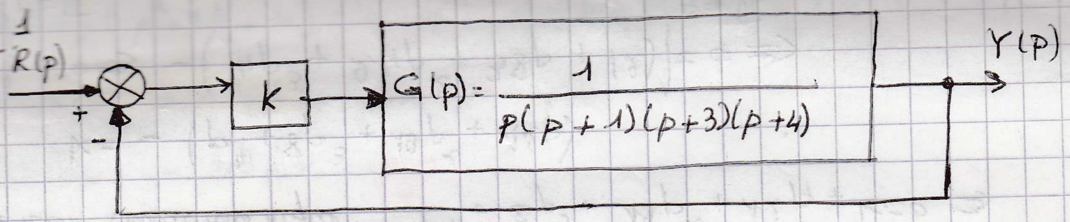
Corrigé type TD N° 3 : Lieu d'Evans (Lieu des racines)

Exercice N° 1



① **Détermination de la fonction de transfert en boucle ouverte**

$T(p) = k \cdot G(p) \cdot H(p)$; $H(p) = 1$; retour unitaire.

Donc $$T(p) = \frac{k}{p(p+1)(p+3)(p+4)}$$

② **Détermination de la fonction de transfert en boucle fermée**

$$F(p) = \frac{k\,G(p)}{1 + k\,G(p) \cdot H(p)} = \frac{k\,G(p)}{1 + T(p)}$$

$$F(p) = \frac{k}{p(p+1)(p+3)(p+4) + k}$$

③ **Détermination de l'équation caractéristique :** $1 + kG(p) \cdot H(p) = 1 + T(p) = 0 \Rightarrow$

$$p(p+1)(p+3)(p+4) = 0 \Rightarrow p^4 + 8p^3 + 19p^2 + 12p + k = 0$$

④ **Condition des angles et des amplitudes**

4-1 : Condition des modules : $\dfrac{\prod_{i=1}^{m} l_i}{\prod_{i=1}^{n} d_i} = \dfrac{1}{k}$ Donc :

$$1 + \frac{k}{p(p+1)(p+3)(p+4)} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{p(p+1)(p+3)(p+4)} = -\frac{1}{k}$$

Alors $$\frac{1}{|p||p+1||p+3||p+4|} = \left|-\frac{1}{k}\right| = \frac{1}{|k|} = \frac{1}{k}$$

4-2 condition des angles : $\sum_{i=1}^{m} \varphi_i - \sum_{i=1}^{n} \psi_i = (2\lambda + 1)\pi$

$$\arg(k) - \arg(p) - \arg(p+1) - \arg(p+3) - \arg(p+4) = (2\lambda+1)\pi$$

⑤ **Axe de symétrie :** Les racines de $(1 + T(p)) = 0$ sont réelles, l'axe réel du plan complexe "p" (plan P) est donc axe de symétrie du lieu.

⑥ **Le nombre de pôles et des zéros :**

n : le nombre de pôles : $p = 0$, $p = -1$, $p = -3$ et $p = -4$ $(n = 4)$

m : le nombre de zéros (Aucun zéros).

⑦ Directions asymptotiques

Il existe n points de départ (Les pôles) et m points d'arrivée (les Zeros) ; comme $n \geq m$, il exist $(n-m)$ directions asymptotiques.

$n-m = 4-0 = 4$ Donc : $\begin{cases} 4 \text{ branches} \\ 4 \text{ directions asymptotiques} \end{cases}$

⑧ Les asymptotes :

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m} = \frac{(0-1-3-4)-(0)}{4-0} = -\frac{8}{4} = -2 \qquad \sigma_a = -2$$

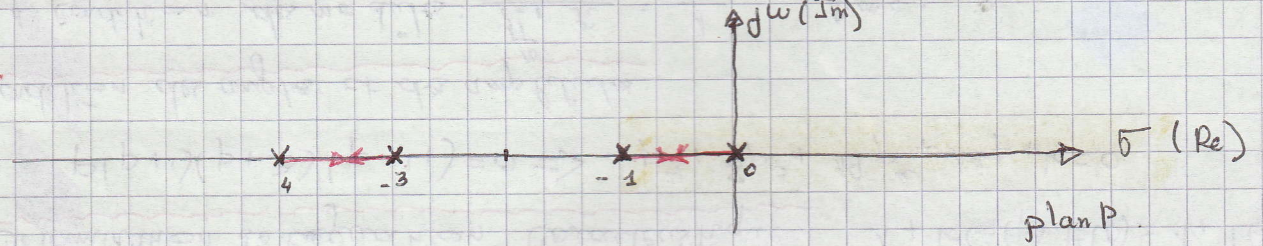
$$\theta_a = \frac{(2d+1)\pi}{n-m} \quad ; d = 0, 1, 2, 3, \ldots (n-m-1)$$

Donc $n-m-1 = 4-0-1 = 3$ Alors $d = 0, 1, 2, 3$.

Pour $d=0 \rightarrow \theta_a = \frac{\pi}{4}$; $d=1 \rightarrow \theta_a = \frac{3\pi}{4} = (\pi - \pi/4)$

$d=2 \rightarrow \theta_a = \frac{5\pi}{4} = (\pi + \frac{\pi}{4})$; $d=3 \rightarrow \theta_a = \frac{7\pi}{4} = (2\pi - \pi/4)$

⑨ Parties de l'axe réel appartenant au lieu des racines



seuls les pôles et les Zeros réels sont-ils pris en considération.

Ainsi tout point M de l'axe réel appartient au lieu d'Evans si on compte un nombre impair de pôles et de Zeros à droite de M

- les segment $[-1, 0]$; $[-4, -3]$

⑩ Point de branchement : ou le lieu des racines quitte l'axe réel est donné par la relation suivante :

$$\left.\frac{dk}{dp}\right|_{p=\sigma_b} = 0$$

L'equation caractéristique $p^4 + 8p^3 + 19p^2 + 12p + k = 0 \Rightarrow$

$$k = -(p^4 + 8p^3 + 19p^2 + 12p)$$

$$\left.\frac{dk}{dp}\right|_{p=\sigma_b} = 0 \Rightarrow \left.-(4p^3 + 24p^2 + 38p + 12)\right|_{p=\sigma_b} = 0 \Rightarrow$$

$-(4\sigma_b^3 + 24\sigma_b^2 + 38\sigma_b + 12) = 0 \Rightarrow 2\sigma_b^3 + 12\sigma_b^2 + 19\sigma_b + 6 = 0$

$(\sigma_b + 0{,}424)(p^2 + ap + b) = 0 \Rightarrow \quad a = 5{,}576, \; b = 7{,}075$

Alors $\sigma_b = -0{,}424$ accepté

$\sigma_b = -1{,}952$ rejeté

$\sigma_b = -3{,}623$ accepté

(11) Intersection avec l'axe imaginaire : on utilise la méthode de Routh

L'équation caractéristique : $p^4 + 8p^3 + 19p^2 + 12p + k = 0$

p^4	1	19	k	0
p^3	8	12	0	0
p^2	17,5	k	0	
p^1	$\frac{210-8k}{17{,}50}$	0		
p^0	k			

pour que le système soit stable, il faut que : la première colonne tient même signe positive alors

$\frac{210-8k}{17{,}50} > 0 \Rightarrow 210 - 8k > 0 \Rightarrow k < \frac{210}{8}$

$k < 26{,}25$

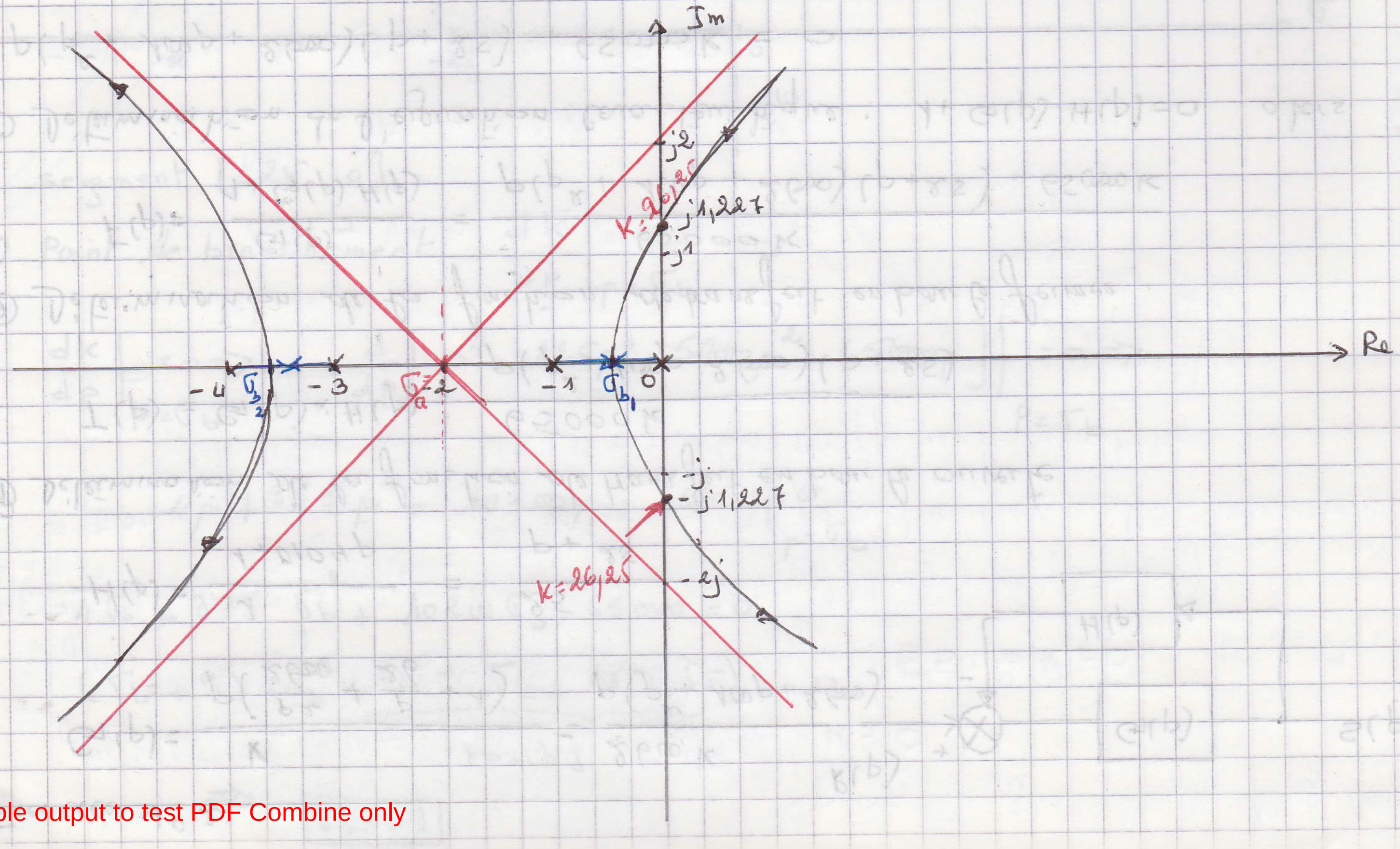
$k > 0 \Rightarrow$

$0 < k < 26{,}25$

en prend 3ème ligne $17{,}5\,p^2 + k = 0 \Longrightarrow p^2 = -\frac{k}{17{,}5}$

$p = \pm j\sqrt{\frac{k}{17{,}5}}$

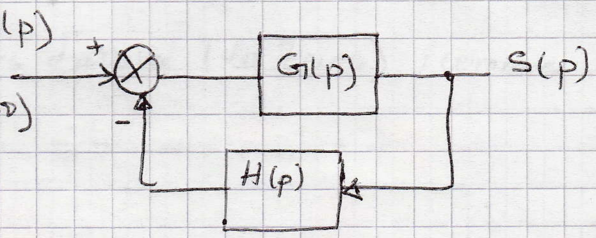
Pour $k = 26{,}25 \rightarrow P = \pm j\,1{,}2247 \qquad p = \pm j\omega, \; \omega = 1{,}2247$ rad/s



Sample output to test PDF Combine only

Exercice N° 2:

$$G(p) = \frac{k}{p\left(\frac{p^2}{2600} + \frac{p}{26} + 1\right)} = \frac{2600\,k}{p(p^2 + 100p + 2600)}$$



$$H(p) = \frac{1}{1 + 0{,}04p} = \frac{25}{p + 25}$$

① Détermination de la fonction de transfert en boucle ouverte.

$$T(p) = G(p) \times H(p) = \frac{65000\,k}{p(p^2 + 100p + 2600)(p+25)}$$

② Détermination de la fonction de transfert en boucle fermée.

$$F(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p).H(p)} = \frac{65000\,k}{p(p^2 + 100p + 2600)(p+25) + 65000\,k}$$

③ Détermination de l'équation caractéristique : $1 + G(p).H(p) = 0$ alors

$$p(p^2 + 100p + 2600)(p+25) + 65000\,k = 0$$

$$p^4 + 125p^3 + 5100p^2 + 65000p + 65000\,k = 0$$

④ condition des angles et des amplitudes.

4_1 Conditions des amplitude

$$1 + \frac{65000\,k}{p(p^2 + 100p + 2600)(p+25)} = 0$$

$p^2 + 100p + 2600$; $\Delta = 100^2 - 4(1)(2600) = -400$

$P_1 = -50 + j10$; $P_2 = -50 - j10$

Donc

$$\frac{65000\,k}{p(p + (50 - j10))(p + (50 + j10))(p+25)} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{p(p + (50 - j10))(p + (50 + j10))(p+25)} = -\frac{1}{65000\,k}$$

$$\frac{1}{|p||p + (50 - j10)||p + (50 + j10)||p+25|} = \left|-\frac{1}{65000\,k}\right| = \frac{1}{65000\,k}$$

4_2 Condition des angles

$$\arg(65000\,k) - \arg(p) - \arg(p + (50 - j10)) - \arg(p + (50 + j10)) - \arg(p+25) = (2\lambda + 1)\pi$$

⑤ Axe de symétrie : ~~Le~~ l'axe réel du plan complexe "p" (Plan_p) est donc axe de symétrie du lieu.

⑥ Le nombre de pôles et des Zeros.

n : le nbr de pôles $\quad p = 0,\ p = -50 + j10,\ p = -50 - j10\ ;\ p = -25$

m : le nbr de Zeros : Aucun Zeros.

⑦ Direction asymptotiques.

Il existe n points de depart et m points d'arrivee $\quad n - m = 4 - 0 = 4$

$$\begin{cases} 4 \text{ branches} \\ 4 \text{ directions asymptotiques} \end{cases}$$

⑧ Les asymptotes

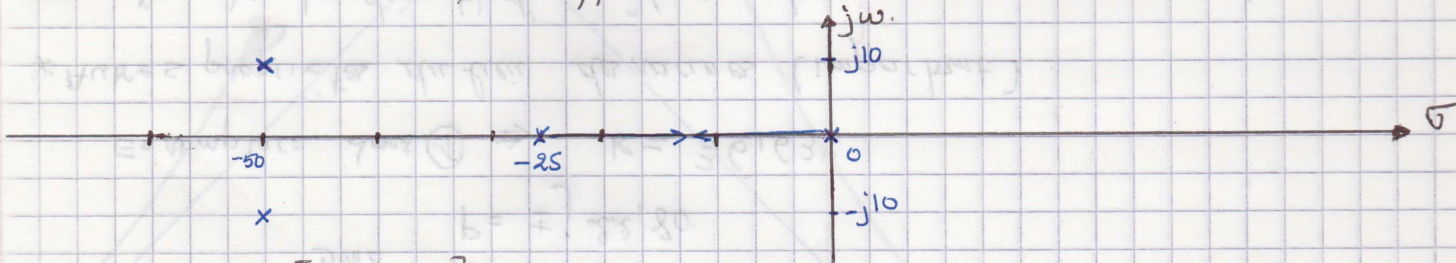
$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{i=1}^{m} Z_i}{n-m} = \frac{(0 - 50 + \cancel{j10} - 50 - \cancel{j10} - 25) - (0)}{4} = -31{,}25$$

$$\theta_a = \frac{(2\lambda + 1)}{n-m}\pi \ ;\ \lambda = 0, 1, 2, \dots (n-m-1) \quad \text{alors } \lambda = 0, 1, 2, 3.$$

$\lambda = 0 \Rightarrow \theta_a = \pi/4\ ; \quad \lambda_1 = 1 \Rightarrow \theta_a = \frac{3\pi}{4} = (\pi - \pi/4)$

$\lambda = 2 \Rightarrow \theta_a = \frac{5\pi}{4} = (\pi + \frac{\pi}{4})\ ; \quad \lambda_3 = 3 \Rightarrow \theta_a = \frac{7\pi}{4} = (2\pi - \frac{\pi}{4}).$

⑨ Parties de l'axe réel appartenants au lieu des racines



segment [-25, 0]

⑩ Point de branchement $\left.\frac{dk}{dp}\right|_{p=\sigma_b} = 0 \Rightarrow$

$$\left.\frac{dk}{dp}\right|_{p=\sigma_b} = 0 \Rightarrow -\left.\frac{d}{dp}\left[p^4 + 125p^3 + 5100p^2 + 65000p\right]\right|_{p=\sigma_b} = 0 \Rightarrow$$

$$\left.4p^3 + 375p^2 + 10200p + 65000\right|_{p=\sigma_b} = 0$$

$$4\sigma_b^3 + 375\sigma_b^2 + 10200\sigma_b + 65000 = 0$$

$$(\sigma_b + 9)\underbrace{(\sigma_b^2 + 84{,}75\sigma_b + 1805{,}55)}_{\text{Positif}} = 0$$

$\Rightarrow \boxed{\sigma_b = \dots}$

(11) L'intersection avec L'axe imaginaire : on pose $p = j\omega$ dans l'éq. caract.

$$p^4 + 125p^3 + 5100p^2 + 65000p + 65000K = 0$$

$$(j\omega)^4 + 125(j\omega)^3 + 5100(j\omega)^2 + 65000(j\omega) + 65000K = 0$$

$$(\omega^4 - 5100\omega^2 + 65000K) + j(65000\omega - 125\omega^3) = 0$$

Donc
$$\begin{cases} \omega^4 - 5100\omega^2 + 65000K = 0 & (1) \\ 65000\omega - 125\omega^3 = 0 & (2) \end{cases}$$
résoudre l'équation avec deux coefficient ω et K

(2) $\Rightarrow$ $\omega(65000 - 125\omega^2) = 0 \Rightarrow \omega = 0$ impossible

alors $65000 - 125\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \dfrac{65000}{125} = 520$

$\omega = \pm\sqrt{520} = \pm 22{,}80$ rad/s.

Donc

$P = \pm j\,22{,}80$

En remplace dans (1) $\Rightarrow$ $K = 36{,}63$

* Autres propriétés du lieu des racines (important).

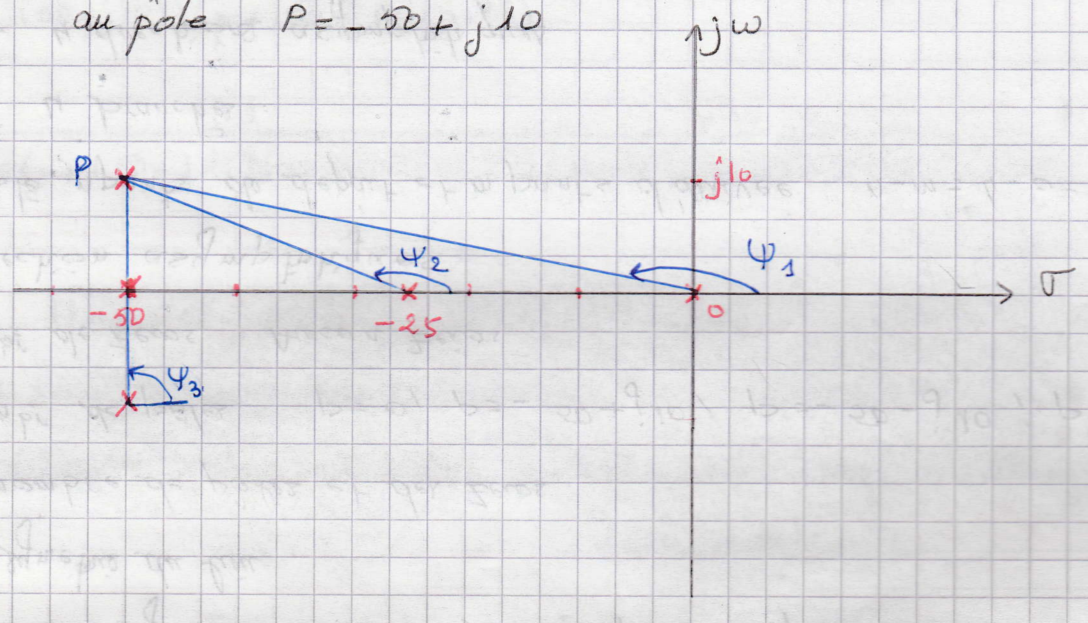
- Angle de départ d'un pôle complexe

$$\theta_D = \pi + \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \varphi_i}_{\text{Zeros}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \psi_i}_{\text{pôles}}\Big)$$

- Angle d'arrivée sur un Zéro complexe

$$\theta_A = \pi - \Big(\sum_{i=1}^{m} \varphi_i - \sum_{i=1}^{n} \psi_i\Big)$$

Donc on a deux pôles complexe $\Rightarrow$ on a angle de départ du lieu au pôle $P = -50 + j10$



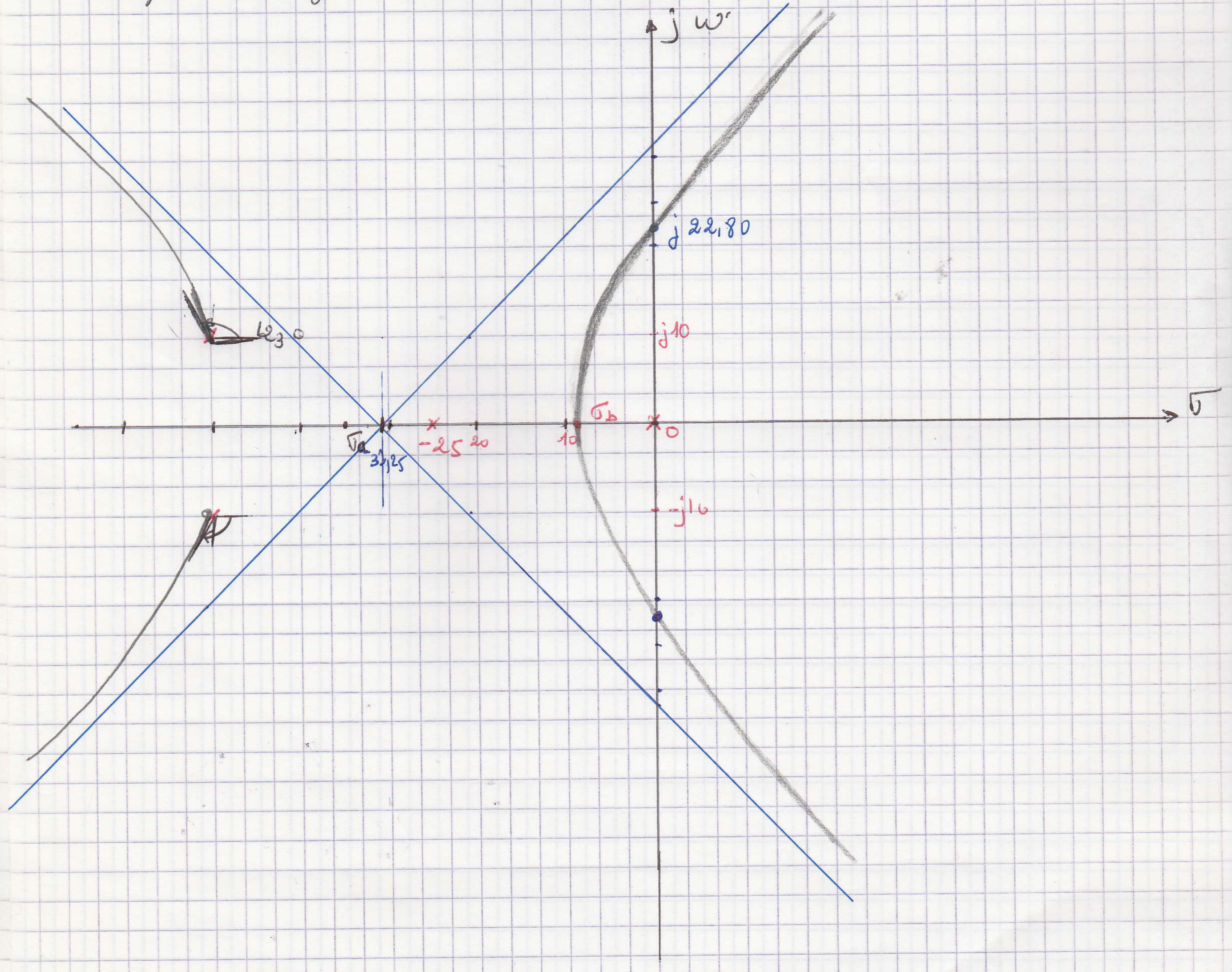
- La méthode pour déterminer l'angle de départ est la suivante.

1) on trace la carte pôles et zeros.

2) on fait le choix sur un pôle complexe à partie imaginaire positive parceque le lieu d'Evans prend l'axe réel la symétrie.

3) calcul chaque angle pour le pôle considérée en remplaçant le complex P par le pôle choisi $p = -50 + j10$

4) D'après cette angle on trace le lieu d'Evans dans le deuxième partie



$$\sum_{i=1}^{m} \varphi_{i\,zeros} = 0 \; ; \qquad \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \left(\arg(p) + \arg(p + 50 + j10) + \arg(p + 25)\right)$$

$p = -50 + j10$

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \arg(-50 + j10) + \arg(\cancel{-50} + j10 + \cancel{50} + j10) + \arg(-50 + j10 + 25)$$

$$= \operatorname{arctg}\left(-\frac{10}{50}\right) + \operatorname{arctg}(j20) + \operatorname{arctg}(-25 + j10)$$

$$= -11{,}31 + 90 - 21{,}80 = 56{,}89$$

$$\theta_D = \pi + \left[\sum_{i=1}^{m} \varphi_i - \sum_{i=1}^{n} \psi_i \right] = \pi + (0 - 56,89) = 123^\circ,11$$