Chapitre 1

Topologie dans le plan complexe

1.1 Propriétés algébriques des nombres complexes.

Proposition 1.1.1 *L'ensemble* $\mathbb{R}^2$ *muni des deux opérations,*

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, \;\; (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, \;\; (x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

est un corps commutatif.

Définition 1.1.1 *Le corps* $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ *est appelé le corps des nombres complexes.*

On le note $\mathbb{C}$*.*

Proposition 1.1.2 *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, 0) & \longmapsto & x \end{array}$$

est un isomorphisme.

L'ensemble $\mathbb{R}\times \{0\}$ est identifié à $\mathbb{R}$, $((x, 0) = x))$.

Ecriture.

Comme

$$(0,1)\times(0,1)=(-1,0)$$

on peut écrire tout nombre complexe $z=(x,y)$ sous la forme,

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)\,(y,0)=x+iy$$

où i est le nombre complexe $(0,1)$.

Définition 1.1.2 *Le nombre réel x est appelé partie réelle de z. Notée $\mathcal{R}e(z)$.*
Le nombre réel y est appelé partie imaginaire de z. Notée $\mathcal{I}m(z)$.

Remarque 1.1.1 *Deux nombres complexes z_1 et z_2 sont égaux si et seulement si*

$$\mathcal{R}e(z_1)=\mathcal{R}e(z_2)\quad et\quad \mathcal{I}m(z_1)=\mathcal{I}m(z_2).$$

Représentation des nombres complexes

Considérons un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$.

1) Représentation par un point.

Tout nombre complexe z est associé à un unique point M de coordonnées $(\mathcal{R}e(z),\ \mathcal{I}m(z))$, ce point M est appelé point-image du nombre complexe z.

Tout point M du plan de coordonnées $(x,\ y)$ est associé à un unique nombre complexe $z=x+iy$, ce nombre complexe z est appelé affixe du point M.

Les nombres réels ont pour image les points de l'axe des abscisses appelé axe réel.

Les nombres imaginaires purs ont pour image les points de l'axe des ordonnées appelé axe imaginaire.

2) Représentation par un vecteur.

Tout nombre complexe z est associé à un vecteur $\overrightarrow{V}$ de coordonnées $(\mathcal{R}e(z),\ \mathcal{I}m(z))$, ce vecteur $\overrightarrow{V}$ est appelé vecteur-image du nombre complexe z.

Tout vecteur $\overrightarrow{V}$ de coordonnées (x, y) est associé à un unique nombre complexe $z = x + iy$, ce nombre complexe z est appelé affixe du vecteur $\overrightarrow{V}$.

Le plan complexe

Définition 1.1.3 *Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur-image du nombre complexe $z = 1$ et $\overrightarrow{v}$ le vecteur-image du nombre complexe $z = i$.*

Le plan muni du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est appelé plan complexe.

Conjugué d'un nombre complexe

Définition 1.1.4 *Le nombre complexe*

$$\overline{z} = x - iy$$

est appelé conjugué de $z = x + iy$.

Propriétés

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \qquad z_2 \neq 0$$

$$\mathcal{R}e(z) = x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \mathcal{I}m(z) = y = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Exemple 1.1.1

$$\overline{\left(\frac{1+2i}{-3i}\right)} = \frac{\overline{(1+2i)}}{\overline{(-3i)}} = \frac{1-2i}{3i} = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i.$$

Module d'un nombre complexe

Définition 1.1.5 *Le module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est le nombre positif*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Propriétés

$$|z| = |\overline{z}|$$

$$|z|^2 = z\overline{z}$$

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

Remarque 1.1.2 *Le module d'un nombre complexe z est la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$, M est le point d'affixe z.*

Exemple 1.1.2

$$\left|\frac{1-2i}{3+i}\right| = \frac{|1-2i|}{|3+i|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Argument d'un nombre complexe

Définition 1.1.6 *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul. on appelle argument du nombre complexe z,*

le nombre réel noté $\arg(z)$ *défini par :*

$$\arg(z) = arctg(\frac{y}{x}).$$

Remarque 1.1.3 - *L'argument d'un nombre complexe non nul z de point-image M est la mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$.*

- L'argument de $z = 0$ n'est pas déterminé.

- Tout nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments qui diffèrent entre eux d'un multiple de 2π.

Propriétés

$$arg(\overline{z}) = -arg(z), \quad z \neq 0$$

$$arg(z_1 \times z_2) = arg(z_1) + arg(z_2), \quad z_1 \neq 0 \text{ et } z_2 \neq 0$$

$$arg(\frac{z_1}{z_2}) = arg(z_1) - arg(z_2), \quad z_1 \neq 0 \text{ et } z_2 \neq 0$$

Exemple 1.1.3

$$\arg(1+i) = arctg(1) = \frac{\pi}{4} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Formes d'écriture d'un nombre complexe

Tout nombre complexe peut s'écrire sous trois formes :

- La forme algébrique ou cartésienne,

$$z = x + iy.$$

- La forme polaire ou trigonométrique,

$$z = |z| \left(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))\right).$$

- La forme d'Euler ou exponentielle,

$$z = |z| \, e^{i\arg(z)}$$

où

$$e^{i\arg(z)} = \cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z)).$$

Exemple 1.1.4

$$z = 1 + i$$
$$z = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$$
$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Formule de DE Moivre

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z)))^n = \cos(n\arg(z)) + i\sin(n\arg(z)).$$

Remarque 1.1.4 *La formule de DE Moivre est un cas particulier de*

$$z^n = |z|^n e^{in\arg(z)}.$$

Exemple 1.1.5

$$\Big(\cos(\frac{\pi}{7}) + i\sin(\frac{\pi}{7})\Big)^{28} = \cos(28 \times \frac{\pi}{7}) + i\sin(28 \times \frac{\pi}{7}) = \cos(4\pi) + i\sin(4\pi) = 1.$$

Racines $n^{ième}$d'un nombre complexe

Tout nombre complexe non nul z possède n racines $n^{ième}$ données par,

$$z_k = |z|^{1/n} e^{i\left(\frac{\arg(z)+2k\pi}{n}\right)}, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

où $n \geq 1$ est un entier naturel.

Exemple 1.1.6 *Les n racines $n^{ième}$ de $z = 1$ sont,*

$$z_k = e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Equations du second degré à coefficients complexes

Soit l' équation du second degré,

$$az^2 + bz + c = 0$$

où $a \neq 0$, b et c sont trois nombres complexes.

Elle admet deux solutions :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de l'équation.

Remarque 1.1.5 *Pour calculer $\sqrt{\Delta}$ on utilise la forme exponentielle de Δ ou la méthode pour déterminer les racines carrées du nombre complexe.*

Exemple 1.1.7 *Résoudre dans $\mathbb{C}$*

$$z^2 - 3iz - 2 = 0.$$

Le discriminant de l'équation est,

$$\Delta = -9 + 8 = -1 = i^2$$

l'équation admet deux solutions,

$$z_1 = \frac{3i - i}{2} = i \quad et \quad z_2 = \frac{3i + i}{2} = 2i.$$

1.2 Propriérés topologiques.

Comme $\mathbb{C}$ est corps commutatif, alors c'est un espace vectoriel sur lui même.

C'est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1.2.1 - *$dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$, $\{1\}$ est une base.*

- $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$, $\{1, i\}$ *est une base.*

Proposition 1.2.1 *L'application*

$$\begin{array}{rccl} d: & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (z_1, z_2) & \longmapsto & d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| \end{array}$$

est une distance sur $\mathbb{C}$.

Proposition 1.2.2 *L'application*

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{N}: & \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & z & \longmapsto & \mathcal{N}(z) = |z| \end{array}$$

est une norme sur $\mathbb{C}$.

Remarque 1.2.2 - $(\mathbb{C}, d)$ *est un espace métrique complet.*

- $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ *est un espace vectoriel normé complet.*

Définition 1.2.1 *Un cercle de centre z_0 et de rayon r*

$$C_r(z_0) = C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \; / \; |z - z_0| = r\}.$$

Un disque ouvert de centre z_0 et de rayon r

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \; / \; |z - z_0| < r\}.$$

Un disque fermé de centre z_0 et de rayon r

$$\overline{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \ |z - z_0| \leq r\}.$$

Définition 1.2.2 *Une partie U de $\mathbb{C}$ est dite ouverte si et seulement si pour tout point z de U, il existe un disque ouvert de centre z inclus dans U.*

L'intérieur d'une partie U de $\mathbb{C}$, notée $\overset{\bullet}{U}$ ou $Int(U)$, est le plus grand ouvert inclus dans U.

Une partie U de $\mathbb{C}$ est dite fermée si son complémentaire est ouvert.

L'adhérence d'une partie U de $\mathbb{C}$, notée $\overline{U}$, est le plus petit fermé contenant U.

Une partie U de $\mathbb{C}$ est un voisinage de $z \in \mathbb{C}$ si et seulement si U contient un ouvert contenant z.

On dit que $z \in \mathbb{C}$ est un point d'accumulation d'une partie U de $\mathbb{C}$ si et seulement si tout voisinage de z rencontre $U \diagdown \{z\}$.

Un point $z \in U \subset \mathbb{C}$ est dit point isolé dans U s'il n'est pas un point d'accumulation de U.

Le bord, ∂U, ou la frontière, $Fr\ (U)$, d'une partie U de $\mathbb{C}$ est $\partial U = Fr\ (U) = \overline{U} \diagdown \overset{\bullet}{U}$.

Une partie U de $\mathbb{C}$ est dite connexe si elle n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints.

Proposition 1.2.3 *Toute application continue, définie sur une partie connexe U, et à valeurs dans $\{0, 1\}$ est constante.*

Définition 1.2.3 *Une partie U de $\mathbb{C}$ est dite connexe par arcs si on peut relier deux points quelconques*

de U par un chemin contenu dans U.

Proposition 1.2.4 *Toute partie connexe par arcs de $\mathbb{C}$ est connexe.*

Toute partie connexe et ouverte de $\mathbb{C}$ est connexe par arcs.

Définition 1.2.4 *Une partie de $\mathbb{C}$ est dite un domaine si et seulement si elle ouverte et connexe.*

Une partie U de $\mathbb{C}$ est dite bornée si et seulement s'il existe un disque ouvert contenant U.

Une partie U de $\mathbb{C}$ est dite compacte si et seulement si elle est fermée et bornée de $\mathbb{C}$.

1.3 L'infini en analyse complexe.

Projection stéréographique

On considère $\mathbb{C}$ comme le plan Oxy dans $\mathbb{R}^3$ et la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de centre $O(0,0,0)$ et de rayon 1.

Le point $N(0,0,1)$ est le pôle nord de la sphère $\mathbb{S}^2$ et le point $S(0,0,-1)$ son pôle sud.

La droite NM passant par le pôle nord $N(0,0,1)$ et par le point $M(\alpha,\beta,\gamma)$ de l

a sphère $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ coupe le plan Oxy en un unique point $M'(x,y,0)$ d'affixe $z = x + iy$,

$$x = \frac{\alpha}{1-\gamma}, \quad y = \frac{\beta}{1-\gamma}.$$

Ainsi à chaque point $M(\alpha,\beta,\gamma)$ de la sphère $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ est donc associé un unique point $M'(x,y)$ d'affixe $z = x + iy$ sur le plan Oxy.

Le pôle sud $S(0,0,-1)$ est associé au point d'affixe $z = 0$.

De cette manière on a une bijection de la sphère $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ sur $\mathbb{C}$.

Définition 1.3.1 *L'application σ*

$$\begin{array}{cccc} \sigma & \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (\alpha,\beta,\gamma) & \longmapsto & \sigma(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\alpha}{1-\gamma} + i\frac{\beta}{1-\gamma} \end{array}$$

est appelée projection stéréographique.

La bijection réciproque σ^{-1} est définie par

$$\begin{array}{llll} \sigma^{-1} & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \setminus \{N \\ & z = x + iy & \longmapsto & \sigma^{-1}(z) = (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2} \right) \end{array}$$

Remarque 1.3.1 *L'image d'un cercle sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ par σ est un cercle dans $\mathbb{C}$.*
L'image d'un cercle sur $\mathbb{S}^2$ passant par N par σ est une droite dans $\mathbb{C}$.

On constate que quand un point M de la sphère s'approche de N, son image $\sigma(M)$ s'éloigne à l'infini ($|z|$ devient très grand).
Ainsi on peut prolonger σ en une bijection définie sur toute la sphère, en ajoutant à $\mathbb{C}$ un point, image par σ du pôle nord N, qu'on note ∞.
On pose,

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty$$
$$\forall z \in \mathbb{C}, z + \infty = \infty$$
$$\forall z \in \mathbb{C}^*, z \times \infty = \infty.$$

Définition 1.3.2 *L'image par σ du pôle nord N s'appelle point à l'infini et est notée, $\sigma(N) = \infty$.*

Définition 1.3.3 *Le plan complexe ainsi étendu, noté $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, est appelé sphère de Riemann.*