Chapitre 1

Fonction de la variable complexe

1.1 Définition de la fonction de la variable complexe.

Définition 1.1.1 *Une fonction complexe f à variable complexe dans une partie Ω de $\mathbb{C}$ est une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$.*

Remarque 1.1.1 *Le mot fonction utilisé dans cette définition ne correspond pas toujours au sens usuel du terme. Car il arrive qu'une fonction à variable complexe fait correspondre à un complexe z dans Ω plusieurs images auquel cas, la fonction est dite multiforme (sinon, elle dite uniforme). Cependant un choix convenable de l'ensemble Ω peut éliminer ce caractère multiforme et la fonction ainsi définie est dite une détermination (ou branche) de la fonction.*

Exemple 1.1.1 *1) La fonction $z \longmapsto 2z$ est une fonction uniforme sur $\mathbb{C}$.*
2) La fonction $z \longmapsto z^{1/2}$ est une fonction multiforme sur $\mathbb{C}$.
cette fonction possède deux valeurs données chacune par :

$$\omega_0 = |z|^{1/2} e^{i\frac{\arg z}{2}}$$

$$\omega_1 = |z|^{1/2} e^{i\left(\frac{\arg z + 2\pi}{2}\right)}$$

Remarque 1.1.2 *On peut voir une fonction complexe définie sur une partie* Ω *de* $\mathbb{C}$, *comme une fonction de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{C}$. *Si on désigne par* U *sa partie réelle et par* V *sa partie imaginaire, on peut écrire pour* $z = x + iy$ *de* Ω,

$$f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$$

Ceci définit deux fonctions U *et* V *sur une partie de* $\mathbb{R}^2$. *Réciproquement la donnée de deux fonctions réelles* U *et* V *sur une partie de* $\mathbb{R}^2$ *permet de définir une fonction complexe* $f = U + iV$ *sur une partie de* $\mathbb{C}$. *Ainsi la donnée d'une fonction complexe* f *à variable complexe est équivalente à la donnée de deux fonctions réelles* U *et* V *sur une partie de* $\mathbb{R}^2$ *et telles que :*

$$f = U + iV$$

Exemple 1.1.2 *1)* $z \longmapsto z^2 = (x^2 - y^2) + i\,(2xy)$.
2) $z \longmapsto \frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

Coupure et point branchement

On a vu que la fonction $z \longmapsto z^{\frac{1}{2}}$ prend deux valeurs
$\omega_0 = |z|^{1/2}\, e^{i\frac{\arg z}{2}}$ et $\omega_1 = |z|^{1/2}\, e^{i\left(\frac{\arg z + 2\pi}{2}\right)}$.

Considérons deux plans complexes, le premier pour représenter les nombres complexes z et le second pour représenter leurs images ω par la fonction $z^{\frac{1}{2}}$. Soit M_1 le point d'affixe $z_1 = re^{i\theta_1}$ dans le premier plan et M_1' le point d'affixe $\omega_0 = r^{1/2}e^{i\frac{\theta_1}{2}}$dans le plan des ω. Si à partir de M_1, on fait décrire à $M(z)$ un cercle centré à l'origine, son image $M'(\omega)$ par $z^{\frac{1}{2}}$ décrit un demi-cercle centré en 0, et d'origine $M'(\omega)$. Lorsqu'on revient sur M_1 après un tour complet (i.e. $\theta = \theta_1 + 2\pi$), l'extrémité N du demi-cecle décrit par $M'(\omega)$ a pour affixe $\omega_1 = r^{1/2}e^{i\left(\frac{\theta_1 z + 2\pi}{2}\right)}$ et diffère évidemment du point initial M_1'. On dit que le point $M'(\omega)$ est sur la première branche de la fonction $z^{\frac{1}{2}}$.

Mais si on effectue encore un second tour complet, dans ce cas,
$\theta = \theta_1 + 4\pi$ et $\omega = r^{1/2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

et la courbe décrite par M' revient à son point initial M'_1 et on dit que le point $M'(\omega)$ est situé sur la seconde branche de la fonction $z^{\frac{1}{2}}$. On constate donc que lorsque $\theta \in [0, 2\pi]$, le point M' est sur la première branche, et si $\theta \in [2\pi, 4\pi]$ le point M' est sur la seconde branche. La fonction $z^{\frac{1}{2}}$ est uniforme sur chaque branche. On constate que pour rendre la fonction $z^{\frac{1}{2}}$ uniforme, il faut tracer une courbe issue de l'origine 0 et s'éloignant à l'infini et interdire à z de la franchir (par exemple, le demi-axe ox'). Une telle courbe est appellée une coupure, et l'origine 0 un point de branchement.

Image d'une partie par une fonction complexe

Soit Ω une partie de $\mathbb{C}$ et F un paramétrage de Ω :

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \ F(x, y) = 0\right\}$$

et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction complexe. L'image $f(\Omega)$ de Ω par f est donnée par :

$$\begin{aligned} f(\Omega) &= \{f(z) \ / \ z \in \Omega\} = \{f(x+iy) \ / \ \ (x, y) \in \Omega\} = \{f(x+iy) \ / \ F(x, y) = 0\} \\ &= \{U(x, y) + iV(x, y) \ \ / \ F(x, y) = 0\} \\ &= \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \ / \ u + iv = U(x, y) + iV(x, y) \ \text{ et } F(x, y) = 0\right\} \end{aligned}$$

Pour trouver $f(\Omega)$, il suffit alors d'éliminer x et y du système

$$\begin{cases} u = U(x, y) \\ v = V(x, y) \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$$

et de déduire une relation de la forme $G(u, v) = 0$ caractérisant $f(\Omega)$.

Exemple 1.1.3 *Soit* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$ *le cercle unité et* $f : z \longmapsto z^2$*, le système* *s'écrit :*

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

en éliminant x et y on tire

$$u^2 + v^2 = 1$$

Ainsi, $f(\Omega)$ est le cercle unité décrit deux fois dans le plan des (u, v), car lorsque z décrit le cercle Ω, (u, v) décrit deux fois le cercle en raison de la relation

$$\arg(f(z)) = 2\arg(z)$$

$$f(z) = |z|^2 e^{2i\arg(z)}.$$

Définition 1.1.2 *Soit f une fonction à variable complexe définie sur une partie Ω de $\mathbb{C}$ et z_0 un point d'accumulation de Ω. On dit que f admet une limite au point z_0, s'il existe un nombre complexe $l = a + ib$ tel que :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(z_0, \epsilon) > 0, \forall z \in \Omega, |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - l| < \epsilon$$

On écrit $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$ si cette limite existe.

Proposition 1.1.1 *Soit f une fonction à variable complexe définie sur une partie Ω de $\mathbb{C}$ et z_0 un point d'accumulation de Ω. Pour que f ait une limite l au point z_0, il faut et il suffit que les fonctions réelles $U(x, y) = \mathrm{Re}(f(z))$ et $V(x, y) = \mathrm{Im}(f(z))$, admettent pour limites respectives $\mathrm{Re}(l)$ et $\mathrm{Im}(l)$ au point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ où $x_0 = \mathrm{Re}(z_0)$ et $y_0 = \mathrm{Im}(z_0)$.*

Proposition 1.1.2 *Soient f et g deux fonctions complexes définies sur une partie Ω de $\mathbb{C}$ et z_0 un point d'accumulation de Ω.*

1) Si f et g admettent une limite en z_0, alors $f+g$ et $f.g$ ont une limite en z_0 et,

$$\lim_{z\to z_0}(f+g)(z)=\lim_{z\to z_0}f(z)+\lim_{z\to z_0}g(z),\qquad \lim_{z\to z_0}(fg)(z)=\lim_{z\to z_0}f(z)\lim_{z\to z_0}g(z).$$

2) Si f admet une limite en z_0 et si $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)\neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ a une limite en z_0 et,

$$\lim_{z\to z_0}\left(\frac{1}{f}\right)(z)=\frac{1}{\lim\limits_{z\to z_0}f(z)}.$$

Définition 1.1.3 *Soit f une fonction à variable complexe définie sur Ω et z_0 un point de Ω. On dit que f est continue au point z_0 si,*

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$$

Définition 1.1.4 *Une fonction à variable complexe définie sur Ω, est dite continue dans Ω, si elle est continue en tout point z_0 de Ω.*

Proposition 1.1.3 *Une fonction f à variable complexe définie sur une partie Ω de $\mathbb{C}$, est continue en un point z_0 de Ω si, et seulement si,* $\mathrm{Re}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *comme fonctions réelles à deux variables réelles (x,y) dans Ω, sont continues au point* $(\mathrm{Re}(z_0),\mathrm{Im}(z_0))$.

Opérations sur les fonctions continues

Soient f et g deux fonctions complexes définies sur Ω de $\mathbb{C}$ et z_0 un point de Ω.

1) Si f et g sont continues en z_0, la somme $f+g$ et le produit $f.g$ sont continues en z_0.

2) Si f est continue en z_0 et si $f(z_0)\neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en z_0.

3) La composée de deux fonctions continues est continue.

Exemple 1.1.4 - $z\longmapsto f(z)=\overline{z}$ *est continue dans $\mathbb{C}$.*

- $z\longmapsto f(z)=\frac{1}{z}$ *est continue dans $\mathbb{C}^*$.*

- $z \longmapsto f(z)=\begin{cases} |z| & si \quad z\neq 0 \\ 1 & si \quad z=0 \end{cases}$ *n'est pas continue en* 0.

- $z \longmapsto f(z)=\operatorname{Re}(z)$ *et* $z \longmapsto f(z)=\operatorname{Im}(z)$ *sont continues dans* $\mathbb{C}$.

1.2 Fonctions holomorphes et fonctions analytiques.

1.2.1 Fonctions holomorphes

Définition 1.2.1 *Soient D un ouvert de $\mathbb{C}$; z_0 un élément de D et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction complexe. On dit que f est dérivable au point z_0, si le nombre*

$$f'(z_0)=\lim_{\substack{u\to 0\\ u\neq 0}}\frac{f(z_0+u)-f(z_0)}{u} \qquad \textit{existe}$$

où u désigne un nombre complexe variable.

On dit que f est dérivable dans D si elle est dérivable en chaque point de D.

Le nombre $f'(z_0)$ est appelé la dérivée de f au point z_0, on le note aussi $\frac{df}{dz}(z_0)$.

Définition 1.2.2 *Soient D un ouvert de $\mathbb{C}$, z_0 un élément de D et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction complexe. On dit que f est $\mathbb{C}$-différentiable au point z_0, s'il existe une application $\mathbb{C}$-linéaire $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant :*

$$\lim_{\substack{u\to 0\\ u\neq 0}}\frac{f(z_0+u)-f(z_0)-L(u)}{|u|}=0$$

où u désigne un nombre complexe variable.

On dit que f est $\mathbb{C}$-différentiable dans D si elle est $\mathbb{C}$-différentiable en chaque point de D.

Remarque 1.2.1 *Une application $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire si elle est de la forme :*

$$z \longmapsto kz, (k\in\mathbb{C}).$$

L'application $\mathbb{C}$*-linéaire* $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$u \longmapsto L(u) = f'(z_0)\, u$$

est appelée différentielle de f *en* z_0*.*

Définition 1.2.3 *Soient* D *un ouvert de* $\mathbb{C}$*,* z_0 *un élément de* D *et* $f : D \to \mathbb{C}$ *une fonction complexe. On dit que* f *est holomorphe au point* z_0*, si* f *est dérivable au point* z_0*. On dit que* f *est holomorphe dans* D *si elle est holomorphe en chaque point de* D*.*

Exemple 1.2.1 *1)* $\forall n \in \mathbb{N}$*, la fonction* $z \longmapsto z^n$ *est holomorphe dans tout* $\mathbb{C}$*. En effet,* $\forall z_0 \in \mathbb{C}$;

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \left(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + ... + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1} \right) = n z_0^{n-1}.$$

2) La fonction $z \longmapsto \frac{1}{z}$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C}^*$*, et sa dérivée au point* z *est* $\left(-\frac{1}{z^2}\right)$*. En effet,* $\forall z_0 \in \mathbb{C}^*$*,*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}}{z - z_0} = -\lim_{z \to z_0} \frac{1}{z z_0} = -\frac{1}{z_0^2}.$$

De ces exemples, on déduit facilement que toute fonction polynôme est holomorphe, et que toute fonction rationnelle est holomorphe sur son domaine de définition.

Proposition 1.2.1 *1) Si* f *est holomorphe dans* D *et si* g *est holomorphe dans* Ω*, la somme* $(f+g)$ *et le produit* $f.g$ *sont holomorphes dans* $D \cap \Omega$*, et on a :*

$$(f+g)' = f' + g' \qquad et \quad (\ f.g)' = f.'g + f.g'.$$

2) Si f *est holomorphe dans* D *et si* g *est holomorphe dans* Ω*, et si* $f(D) \subset \Omega$*,* *la fonction composée $h = g \circ f$ est holomorphe dans D, et on a pour tout $z \in D$:*

$$h'(z) = g'(f(z))f'(z).$$

3) Si g est holomorphe sur D, ne prenant pas la valeur 0, la fonction $\frac{1}{g}$ est holomorphe sur D. Si donc f est holomorphe sur D, le quotient $\frac{f}{g}$ est holomorphe, et on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Proposition 1.2.2 *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$. Pour qu'une fonction complexe $f = P + iQ$, définie sur D, soit holomorphe, il faut et il suffit qu'elle soit différentiable dans D et que sa différentielle en chaque point de D soit $\mathbb{C}$-linéaire.*

Preuve. La condition est nécesssaire. Supposons f holomorphe dans D; et soit $z_0 \in D$. Désignons par L l'application $\mathbb{C}$-linéaire $u \longmapsto f'(z_0)u$. Par définition, on a :

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(z_0 + u) - f(z_0)}{|u|} - f'(z_0) = 0$$

ce qui équivaut à :

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(z_0 + u) - f(z_0) - L(u)}{|u|} = 0.$$

En d'autres termes f est différentiable au point z_0, et sa différentielle en ce point est l'application $\mathbb{C}$-linéaire L.

La condition est suffisante. Soit z_0 un point de D en lequel f admette pour différentielle une application $\mathbb{C}$-linéaire $L : u \longmapsto ku$, $(k \in \mathbb{C})$. On a :

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(z_0 + u) - f(z_0) - ku}{|u|} = 0$$

Cette dernière relation équivaut à :

$$\lim_{u\to 0} \frac{f(z_0+u)-f(z_0)}{|u|} = k$$

et par suite f est holomorphe dans D. ■

Corollaire 1.2.1 *Toute fonction holomorphe est continue.*

Preuve. Toute fonction différentiable est continue. ■

Définition 1.2.4 *Soient D un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 = x_0+iy_0$ un élément de D et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction complexe.On dit que f est $\mathbb{R}$-différentiable au point $z_0 \in D$;*
s'il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant :

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{f(x_0+u, y_0+v) - f(x_0, y_0) - L(u,v)}{|u|+|v|} = 0$$

où (u, v) désigne un élément variable de $\mathbb{R}^2$.
f est dite $\mathbb{R}$-différentiable dans D si elle est $\mathbb{R}$-différentiable en chaque point de D.

Remarque 1.2.2 *Une application $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-linéaire si elle est de la forme :*

$$(u, v) \longmapsto (au + bv, cu + dv), \qquad (a, b, c, d,) \in \mathbb{R}$$

L'application $\mathbb{R}$-linéaire

$$L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$(u, v) \longmapsto L(u, v) = f'(z_0)(u, v)$$

est appelée $\mathbb{R}$-différentielle de f en z_0.
Toute application $\mathbb{C}$-linéaire est $\mathbb{R}$-linéaire ; mais la réciproque n'est pas vraie ;

pour que l'application $\mathbb{R}$-linéaire définie par,

$$L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$(u, v) \longmapsto L(u, v) = (au + bv, cu + dv)$$

soit $\mathbb{C}$-linéaire, il faut et il suffit qu'il existe un nombre $k \in \mathbb{C}$ tel que l'on ait :

$$(au + bv, cu + dv) = k(u + iv)$$

ce qui exige :

$$a + ic = k \qquad et \qquad b + id = ik$$

d'où les conditions (nécessaires et suffisantes) ;

$$a = d \qquad et \quad b = -c.$$

1.2.2 Fonctions analytiques

Définition 1.2.5 *Une fonction f est dite analytique au point $z_0 \in D$, si elle est dérivable dans un voisinage de z_0.*
Elle est dite analytique sur un ouvert D, si elle est analytique en tout point $z \in D$.

Remarque 1.2.3 *- Une fonction analytique est holomorphe.*
- Une fonction holomorphe en un point n'est pas nécessairement analytique en ce point.
- Une fonction holomorphe dans un ouvert D est analytique dans D.

Exemple 1.2.2 *La fonction $f : z \longmapsto |z|^2$ est holomorphe seulement en $z_0 = 0$, mais elle n'est pas analytique en $z_0 = 0$ (elle n'est dérivable dans aucun voisinage de z_0).*

1.3 Conditions de Cauchy-Riemann

Théorème 1.3.1 *Soient P, Q deux fonctions numériques définies sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$. Pour que la fonction complexe $f = P + iQ$ soit holomorphe dans D, il faut et il suffit que les fonctions P, Q soient différentiables sur D et que leurs dérivées partielles vérifient les conditions suivantes dites de Cauchy-Riemann :*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Si ces conditions sont vérifiées, on a en tout point $z = x + iy$ de D :

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \quad + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Preuve. La différentiabilité de f équivaut à celle des fonctions P, Q, et si P, Q sont différentiables, la différentielle de f au point $z = x + iy$ est l'application $\mathbb{R}$-linéaire,

$$L : (u, v) \longmapsto \left(u\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + v\frac{\partial P}{\partial y}(x, y), u\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \quad + v\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \right)$$

Pour que cette application L soit $\mathbb{C}$-linéaire, il faut et il suffit qu'elle vérifie les conditions :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

c'est-à-dire,

$$a = d \quad \text{et} \quad b = -c$$

Enfin, si ces conditions sont vérifiées, l'application L est de la forme :

$$L : u + iv \longmapsto k(u + iv)$$

avec

$$k = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = a + ic$$

d'où l'existence de la dérivée $f'(z) = k$.

En faisant varier le point $z = x + iy$ dans D, on obtient le résultat annoncé. ■

Exemple 1.3.1 - *$f(z) = \frac{1}{z} = (\frac{x}{x^2+y^2}) + i(\frac{-y}{x^2+y^2})$ est holomorphe dans $\mathbb{C}^*$.*

Proposition 1.3.1 *Soient D un ouvert connexe et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans D. On suppose que $\forall z \in D$, $f'(z) = 0$. Alors, f est constante sur D.*

Preuve. Soient $z_0 \in D$ et $B = \{z \in D \ / \ f(z) = f(z_0)\}$. Comme f est continue, l'ensemble B est non vide et fermé dans D. Soit $z = a + ib$ un élément de B.

Comme D est ouvert, il existe un nombre réel strictement positif r

tel que l'ensemble,

$$R = \{x + iy \in \mathbb{C} \ / \quad |x - a| < r \quad \text{et} \quad |y - b| < r\}$$

soit contenu dans D. Soit $a' + ib'$ un élément de R. Si $t \in [0, 1]$, alors

$a + t(a' - a) + ib \in R$ et $a' + i(b + t(b' - b)) \in R$. Soit $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(t) = f(a + t(a' - a) + ib)$. La fonction φ est dérivable sur $[0, 1]$ et on a $\varphi'(t) = (a' - a)f'(a + t(a' - a) + ib)$ pour tout $t \in [0, 1]$. On a donc d'après le théorème des accroissements finis,

$$\varphi(1) - \varphi(0) = 0$$

d'où

$$f(a + ib) = f(a' + ib)$$

Au moyen de la fonction ($t \longmapsto f(a' + i(b + t(b' - b)))\ [0, 1] \to \mathbb{R}$) ; de manière analogue que : $f(a' + ib) = f(a' + ib')$. Par conséquent, $R \subset B$ donc B est ouvert.

Comme D est connexe, l'ensemble B, qui est non vide, ouvert et fermé dans D,

est nécessairement égal à D, donc f est constante sur D. ■

1.4 Fonctions harmoniques

Définition 1.4.1 *Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction définie sur D à valeurs réelles ou complexes.*

On dit que f est harmonique dans D, si elle est de classe C^2 et si ses dérivées partielles vérifient :

$$\forall\,(x,y) \in D, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

En abrégé,

$$\forall\,(x,y) \in D, \quad (\Delta f)(x,y) = 0$$

L'opérateur différentiel $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est appelé Laplacien.

Remarque 1.4.1 *Si $f = P + iQ$, pour que f soit harmonique dans D, il faut et il suffit que P et Q soient toutes les deux harmoniques dans D.*

Proposition 1.4.1 *Soient D un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe dans D. La fonction P, la fonction Q et la fonction f sont harmoniques dans D.*

Preuve. La fonction f étant indéfiniment dérivable dans D (on verra après),
les fonctions P et Q admettent des dérivées partielles de tout ordre
et on a,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}$$

En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann, on obtient,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

Soit encore

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

On montre de même que

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}=0$$

Les fonctions P et Q et, par suite, f sont harmoniques dans D. ■

Exemple 1.4.1 *La fonction $f : z \longmapsto \frac{1}{z}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}^*$.*

On en déduit que les fonctions :

$$P : (x,y) \longmapsto \frac{x}{x^2+y^2} \qquad et \qquad Q : (x,y) \longmapsto -\frac{y}{x^2+y^2}$$

sont harmoniques dans $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Proposition 1.4.2 *Toute fonction réelle P harmonique dans un ouvert D est, au voisinage de chaque point de D, la partie réelle d'une fonction holomorphe au voisinage de ce point, et déterminée à l'addition près d'une constante imaginaire pure.*

Remarque 1.4.2 *La fonction Q, telle que, $f = P + iQ$ est appelée conjuguée harmonique de P.*

Exemple 1.4.2 *$P(x,y) = e^x \cos y$ est harmonique dans tout $\mathbb{C}$.*

$$\frac{\partial P}{\partial x}=e^x\cos y, \quad \frac{\partial P}{\partial y}=-e^x\sin y$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=e^x\cos y, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=-e^x\cos y$$

$$(\Delta P)(x,y)=\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y)=0.$$

Déterminons sa conjuguée harmonique Q. D'après les conditions de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}=e^x\cos y$$

On intègre par rapport à y (x fixé),

$$Q\left(x,y\right)=\int e^{x}\cos y dy=e^{x}\sin y+F(x)$$

où F est une fonction arbitraire de x.

Toujours, d'après les conditions de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}$$

et

$$-e^{x}\sin y=-e^{x}\sin y-F'(x)\Longrightarrow F'(x)=0\Longrightarrow F(x)=c\in\mathbb{R}$$

d'où

$$Q\left(x,y\right)=e^{x}\sin y+c$$

est la conjuguée harmonique de P et

$$\begin{aligned}f(z)&=P\left(x,y\right)+iQ\left(x,y\right)=e^{x}\cos y+i\left(e^{x}\sin y+c\right)\\&=e^{x}\left(\cos y+i\sin y\right)+ic=e^{z}+ic\end{aligned}$$