Série II

Exercise 1 *Soit*

$$f(z) = z^2$$

$$g(z) = \begin{cases} z^2 & si \quad z \neq i \\ 0 & si \quad z = i \end{cases}$$

1- Calculer

$$\lim_{z \to i} f(z) \qquad et \qquad \lim_{z \to i} g(z).$$

2- Montrer que la fonction

$$h(z) = \frac{z}{|z|}$$

n'admet pas de limite au point $z = 0$.

Exercise 2 *1- Etudier la continuité des fonctions*

$$f(z) = z^2$$

$$g(z) = \begin{cases} z^2 & si \quad z \neq i \\ 0 & si \quad z = i \end{cases}$$

au point $z = i$.

Exercise 3 *Soit* f *une fonction de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$. *Démontrer que si* f *est holomorphe, les conditions suivantes sont équivalentes,*

(i) f *est constante.*

(ii) $\operatorname{Re} f$ *est constante.*

(iii) $\operatorname{Im} f$ *est constante.*

En déduire que la fonction g définie sur $\mathbb{C}$ en posant pour tout nombre complexe z, $g(z) = |z|$ n'est pas holomorphe.

Exercise 4 *Soit f une fonction holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On pose pour tout élément $z = x + iy$ de $\mathbb{C}$, $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$. On suppose qu'il existe des nombres réels a, b, c non tous nuls, tels que l'on ait $aP(x, y) + bQ(x, y) = c$ pour tout élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$. Démontrer que f est constante.*

Exercise 5 *(a) Montrer que si f est une fonction holomorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}$, $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ alors*

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

(b) Existe-t-il une fonction holomorphe dans $U = \{z \in \mathbb{C} \ / \ x \neq 0\}$ telle que $P(x, y) = e^{y/x}$?

Exercise 6 *Montrer que la fonction f définie dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = z\,\mathrm{Re}(z)$, est seulement dérivable au point $z = 0$. Calculer $f'(0)$.*

Exercise 7 *(a) Montrer que la fonction définie par*

$$P(x, y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$$

est harmonique.

(b) Déterminer Q telle que $f(z) = P + iQ$ soit analytique.

Solutions de la série II

Solution 1 *1- On a,*

$$\lim_{z \to i} f(z) = \lim_{z \to i} z^2 = i^2 = -1$$
$$\lim_{z \to i} g(z) = \lim_{z \to i} z^2 = i^2 = -1.$$

2- on a,

$$\lim_{z \to 0} h(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z}{|z|} = \lim_{z \to 0} \frac{|z| \, e^{i \arg(z)}}{|z|} = \lim_{z \to 0} e^{i \arg(z)} = e^{i \arg(z)}$$

on voit que la limite de $h(z)$ quand z tend vers 0 dépent de l' argument de z

et donc la limite de $h(z)$ quand z tend vers 0 n'existe pas.

Solution 2 *1- Comme*

$$\lim_{z \to i} f(z) = \lim_{z \to i} z^2 = i^2 = -1 = f(i)$$

f est continue au point $z = i$.

Comme

$$\lim_{z \to i} g(z) = \lim_{z \to i} z^2 = i^2 = -1 \neq 0 = g(i)$$

g n'est pas continue au point $z = i$.

Solution 3 *(i)$\Longrightarrow$(ii). Si $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f = P + iQ$ est constante sur $\mathbb{C}$, alors*

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) - i \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0$$

d'où

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Par conséquent, la fonction à deux variables $Ref = P$ est constante sur $\mathbb{C}$, car ses dérivées *partielles* $\frac{\partial P}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial P}{\partial y}$ *sont nulles sur l'ouvert connexe* $\mathbb{R}^2$.

(ii)$\Longrightarrow$*(iii). Si* $\operatorname{Re} f = P$ *est constante sur* $\mathbb{C}$, *alors*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Comme f *est holomorphe sur* $\mathbb{C}$, *les dérivées partielles de* P *et* Q *vérifient les conditions de Cauchy-Riemann sur* $\mathbb{R}^2$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

On obtient, donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Par conséquent, la fonction à deux variables $Imf = Q$ *est constante sur* $\mathbb{C}$, *car ses dérivées partielles* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial Q}{\partial y}$ *sont nulles sur l'ouvert connexe* $\mathbb{R}^2$.

(iii)$\Longrightarrow$*(i). Si* $\operatorname{Im} f = Q$ *est constante sur* $\mathbb{C}$, *alors*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = 0$$

d'où

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad f'(z) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \ + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0.$$

Par conséquent, la fonction f *est constante sur* $\mathbb{C}$, *car sa dérivée*

f' *est nulle sur l'ouvert connexe* $\mathbb{C}$.

Supposons que la fonction g *est holomorphe sur* $\mathbb{C}$. *Comme la fonction* g *a pour partie imaginaire* $\operatorname{Im} f$, *la fonction constante nulle, d'après l'exo.1 sa partie réelle* Ref *serait constante sur* $\mathbb{C}$, *ce qui contredit l'hypothèse que* $Ref = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ *n'est pas constante sur* $\mathbb{C}$.

On en déduit que la fonction $g(z) = |z|$ *n'est pas holomorphe sur* $\mathbb{C}$.

Solution 4 *On a*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad aP(x,y) + bQ(x,y) = c.$$

En dérivant par rapport à x puis par rapport à y, les deux membres de cette dernière identité,

on obtient un système de deux équations à quatres inconnues $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$

$$\begin{cases} a\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + b\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0 \\ a\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + b\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

En transformant ce dernier système, à l'aide des conditions de Cauchy-Riemann sur $\mathbb{R}^2$, on obtient un système de deux équations à deux inconnues $\frac{\partial P}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial y}$

$$\begin{cases} a\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) - b\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0 \\ b\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + a\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ce système étant linéaire homogène et son discriminant $\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$ *(a, b, c **non tous nuls**), admet l'unique solution $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$.*

Par conséquent Ref est constante sur $\mathbb{R}^2$ et d"après l'exo.1 f est constante sur $\mathbb{C}$.

Solution 5 *(a) Comme f est holomorphe sur l'ouvert U, les dérivées partielles de P et Q*

vérifient les conditions de Cauchy-Riemann sur U

$$\forall (x,y) \in U, \ \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

On obtient

$$\forall (x,y) \in U, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0.$$

Où, on a appliqué le théorème de Schwartz à la fonction Q.

(b) Non, il n'existe aucune fonction ***holomorphe*** *dans $U = \{z \in \mathbb{C} \ / \ x \neq 0\}$*

telle que $P(x,y) = e^{y/x}$, car

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \neq 0.$$

Théorème de Schwarz

Soit P, une fonction réelle de deux variables réelles, définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

Si les dérivées partielles à l'ordre deux existent et sont continues en un point (x,y)de U, alors

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)(x,y) = 0$$

Solution 6 *On a*

$$f(z) = z\,\mathrm{Re}(z) = (x+iy)x = x^2 + ixy = P\left(x,y\right) + iQ\left(x,y\right).$$

La fonction f est de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$. Cherchons les points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ où les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}\left(x,y\right) = \frac{\partial Q}{\partial y}\left(x,y\right) \\ \frac{\partial P}{\partial y}\left(x,y\right) = -\frac{\partial Q}{\partial x}\left(x,y\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x \\ 0 = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Comme la fonction f est de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ et que les conditions de Cauchy-Riemann ne sont

vérifiées que par le seul point $z = 0$, elle est seulement dérivable au point $z = 0$.

Calculons

$$f'(0) = \frac{\partial P}{\partial x}(0,0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(0,0) = (0) + i(0) = 0.$$

Solution 7 *En Calculant*

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}\left(x,y\right) = -e^{-x}(x\sin y - y\cos y - \sin y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}\left(x,y\right) = e^{-x}(x\cos y - \cos y + y\sin y) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) = e^{-x}(x\sin y - y\cos y - 2\sin y) \\ \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = e^{-x}(-x\sin y + y\cos y + 2\sin y) \end{cases}$$

on obtient

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

et donc P est harmonique dans $\mathbb{R}^2$.

(b) Déterminons la conjuguée harmonique Q de P.

D'après les conditions de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = -e^{-x}(x\sin y - y\cos y - \sin y).$$

On intègre par rapport à y (x fixé),

$$Q(x,y) = \int -e^{-x}(x\sin y - y\cos y - \sin y)dy = e^{-x}(x\cos y + y\sin y) + F(x)$$

où F est une fonction arbitraire de x.

Toujours, d'après les conditions de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

et

$$e^{-x}(x\cos y - \cos y + y\sin y) = e^{-x}(x\cos y + y\sin y - \cos y) - F'(x) \Longrightarrow F'(x) = 0 \Longrightarrow F(x) = c \in \mathbb{R}$$

d'où

$$Q(x,y) = e^{-x}(x\cos y + y\sin y) + c$$

est la conjuguée harmonique de P et

$$\begin{aligned}
f(z) &= P\,(x,y) + iQ\,(x,y) = e^{-x}(x\sin y - y\cos y) + i\left(e^{-x}(x\cos y + y\sin y) + c\right) \\
&= e^{-x}\left(ix(\cos y - i\sin y) - y(\cos y + i\sin y)\right) + ic = e^{-x}(ixe^{-iy} - ye^{iy}) + ic \\
&= ixe^{-z} - ye^{-\overline{z}} + ic = \frac{1}{2i}(z+\overline{z})e^{-z} - \frac{1}{2i}(z-\overline{z})e^{-\overline{z}} + ic.
\end{aligned}$$