Série III

Exercise 1 *Soit la fonction*

$$\begin{array}{cccc} \sin & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \end{array}$$

1- Montrer que pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\sin(z) = \sin x\, chy + i \cos x\, shy.$$

2- En utilisant (1), montrer que pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$|\sin(z)| = \sqrt{\sin^2 x + sh^2 y}.$$

3- Calculer

$$\left|\sin(\pi + i\ln(2+\sqrt{5}))\right|.$$

4- Que peut-on déduire pour le module de $\sin(z)$.

Exercise 2 *1- Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation*

$$\sin(z) = 3.$$

Exercise 3 *1- Calculer*

$$Log(-i) \quad et \quad Log(-1).$$

2- En déduire qu'il existe un nombre $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *tel que*

$$Log(z^2) \neq 2Log(z).$$

Exercise 4 *1- Montrer les relations suivantes*

$$\begin{aligned}
\sin(z) &= -ish(iz) \quad , \quad & sh(z) &= -i\sin(iz) \\
\cos(z) &= ch(iz) \quad , \quad & ch(z) &= \cos(iz) \\
tg(z) &= -ith(iz) \quad , \quad & th(z) &= -itg(iz) \\
cotg(z) &= icoth(iz) \quad , \quad & coth(z) &= icotg(iz).
\end{aligned}$$

Exercise 5 *1- Calculer*

$$i^{\frac{1}{i}}, \qquad 1^i, \qquad (-1)^{\sqrt{2}}.$$

Exercise 6 *1- Montrer que*

$$\arcsin(z) = -i\log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right).$$

2- Résoudre (en utilisant (1)) l'équation

$$\sin(z) = 3.$$

Solutions de la série III

Solution 1 *1- On a,*

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(e^{ix-y} - e^{-ix+y}\right) = \frac{1}{2i}\left[(\cos x + i\sin x)\, e^{-y} - (\cos x - i\sin x)\, e^{y}\right] = -\frac{i}{2}\left[\cos x(e^{-}\right.$$
$$= i\cos x(\frac{e^y - e^{-y}}{2}) + \sin x(\frac{e^y + e^{-y}}{2}) = \sin x\, chy + i\cos x\, shy.$$

2- On a d'après(1),

$$|\sin(z)| = \sqrt{\sin^2 x\, ch^2 y + \cos^2 x\, sh^2 y} = \sqrt{\sin^2 x(1 + sh^2 y) + \cos^2 x\, sh^2 y} = \sqrt{\sin^2 x + sh^2 y}.$$

3- D'après(2), on a

$$\left|\sin(\pi + i\ln(2+\sqrt{5}))\right| = \sqrt{\sin^2(\pi) + sh^2(\ln(2+\sqrt{5}))} = sh(\ln(2+\sqrt{5})) = \frac{e^{\ln(2+\sqrt{5})} - e^{-\ln(2+\sqrt{5})}}{2}$$
$$= \frac{e^{2\ln(2+\sqrt{5})} - 1}{2e^{\ln(2+\sqrt{5})}} = \frac{(2+\sqrt{5})^2 - 1}{2(2+\sqrt{5})} = \frac{8 + 4\sqrt{5}}{2(2+\sqrt{5})} = 2.$$

4-On en déduit que la propriété $|\sin x| \leq 1$, vérifiée dans $\mathbb{R}$, ne l'est pas dans $\mathbb{C}$.

Solution 2 *On a,*

$$\sin(z) = 3 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 3 \Leftrightarrow e^{2iz} - 6ie^{-iz} - 1 = 0.$$

En résolvant l'équation

$$e^{2iz} - 6ie^{-iz} - 1 = 0.$$

On obtient

$$e^{iz_1} = (3 - 2\sqrt{2}), \quad e^{iz_2} = (3 + 2\sqrt{2})i.$$

D'ou les solutions

$$z_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(3-2\sqrt{2}), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad z_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(3+2\sqrt{2}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Solution 3 *1- On a,*

$$Log(-i) = \ln|-i| + i\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}i$$
$$Log(-1) = \ln|-1| + i\pi = \pi i.$$

2- On en déduit de (1) qu'il existe $z = -i \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tel que

$$Log(z^2) = Log(-i)^2 = Log(-1) = \pi i \neq 3\pi i = 2Log(-i) = 2Log(z).$$

Solution 4 *On a,*

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{i}\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}\right) = -i\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}\right) = -ish(iz).$$

Même chose pour les autres.

Solution 5 *On a,*

$$i^{\frac{1}{i}} = e^{\log(i^{\frac{1}{i}})} = e^{\frac{1}{i}\log(i)} = e^{-i\log(i)} = e^{-i\left[\ln|i| + i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)\right]} = e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}, \ k \in \mathbb{Z}$$
$$1^i = e^{\log(1^i)} = e^{i\log(1)} = e^{i[\ln|1| + i(2k\pi)]} = e^{2k\pi}, \ k \in \mathbb{Z}$$
$$(-1)^{\sqrt{2}} = e^{\log((-1)^{\sqrt{2}})} = e^{\sqrt{2}\log(-1)} = e^{\sqrt{2}[\ln|-1| + i(\pi+2k\pi)]} = e^{i\sqrt{2}(2k+1)\pi}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Solution 6 *1- En résolvant l'équation*

$$y = \arcsin(z) \Leftrightarrow \sin y = z \Leftrightarrow \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = z \Leftrightarrow e^{2iy} - 2ize^{-iy} - 1 = 0.$$

On obtient

$$e^{iy_1} = iz - \sqrt{1-z^2}, \quad e^{iy_2} = iz + \sqrt{1-z^2}.$$

D'où

$$y_1 = -i\log\left(iz - \sqrt{1-z^2}\right), \quad y_2 = -i\log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

ce qui équivaut à

$$\arcsin(z) = -i\log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right).$$

2- On a d'après (1),

$$\sin(z) = 3 \Leftrightarrow z = \arcsin(3) \Leftrightarrow z = -i\log\left(3i + \sqrt{-8}\right) \Leftrightarrow z_1 = -i\log(3i - 2i\sqrt{2}), \quad z_2 = -i\log(3i + 2i\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = -i\log(3-2\sqrt{2})i, \quad z_2 = -i\log(3+2\sqrt{2})i$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(3-2\sqrt{2}), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad z_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(3+2\sqrt{2}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Chapitre 1