Série IV

Exercise 1 *Calculer l'intégrale* $I = \int\limits_{\Gamma} \overline{z} dz$

1) Γ *est le chemin joignant le point* $(1,1)$ *au point* $(2,4)$

le long de la ***parabole*** *d'équation* $y = x^2$.

2) Γ *est le chemin formé des* ***segments*** *joignant* $(0,0)$ *à* $(1,0)$

et $(1,0)$ *à* $(1,2)$.

Exercise 2 *Calculer* $\int\limits_{\gamma} |z|^2 \, dz$

où γ *est le* ***carré*** *de sommets* $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ *et* $(0,1)$.

Exercise 3 *Calculer les intégrales suivantes :*

$$\int_{\gamma_1} \overline{z} dz$$

γ_1 *étant le chemin défini sur* $[0, \pi]$ *en posant* $\gamma_1(t) = e^{it}$.

$$\int_{\gamma_2} (z+1) dz$$

γ_2 *étant le chemin défini sur* $[0,1]$ *par* $\gamma_2(t) = (1+i)t$.

$$\int_{\gamma_3} \frac{dz}{1+z^2}$$

γ_3 *étant le chemin défini sur* $[0, \pi/4]$ *par* $\gamma_3(t) = e^{it}$.

Exercise 4 *Soient* $\alpha > 0$ *tel que* $\alpha \neq 3$ *et* $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \ |z| = \alpha\}$.

1) Calculer $I = \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - 5iz - 6}$

lorsque le point $2i$ *appartient à l'intérieur de* γ

et le point $3i$ *appartient à l'extérieur de* γ.

2) Calculer I *lorsque* $2i$ *et* $3i$ *appartiennent à l'intérieur de* γ.

Exercise 5 *Soient a, b des réels strictement positifs et Γ **l'ellipse** d'équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Trouver un chemin γ dans $\mathbb{C}$ d'image Γ et calculer $\int\limits_\gamma \frac{dz}{z}$.

En déduire que $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$.

Exercise 6 *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $\overline{D}_1(0)$ et f une fonction holomorphe dans U. Pour $t \in [0, 2\pi]$, on pose $\gamma(t) = e^{it}$.*

1) Calculer les intégrales :

$$I_1 = \int\limits_\gamma \left[2 + z + \frac{1}{z}\right] \frac{f(z)}{z} dz \quad et \quad I_2 = \int\limits_\gamma \left[2 - z - \frac{1}{z}\right] \frac{f(z)}{z} dz.$$

2) En déduire la valeur de :

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2(t/2) dt \quad et \quad \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(e^{it}) \sin^2(t/2) dt.$$

Solutions de la série IV

Solution 1 *1) Calculons l'intégrale*

$$I = \int_{\Gamma} \overline{z}dz = \int_{\Gamma} (x-iy)d(x+iy) = \int_{1}^{2} (x-ix^2)d(x+ix^2) = \int_{1}^{2} (x-ix^2)(1+2ix)dx = 9+\frac{7}{3}i.$$

2) Le chemin Γ est la juxtaposition des deux chemins Γ_1 et Γ_2

$$\Gamma = \Gamma_1 \vee \Gamma_2$$

où Γ_1 est le chemin joignant $(0,0)$ à $(1,0)$ et Γ_2 est le chemin joignant $(1,0)$ à $(1,2)$.
Calculons l'intégrale

$$I = \int_{\Gamma} \overline{z}dz = \int_{\Gamma_1 \vee \Gamma_2} \overline{z}dz = \int_{\Gamma_1} \overline{z}dz + \int_{\Gamma_2} \overline{z}dz = \int_{0}^{1} xdx + \int_{0}^{2} (1-iy)idy = \int_{0}^{1} xdx + i\int_{0}^{2} (1-iy)dy = \frac{5}{2}+2i.$$

Solution 2 *Le chemin γ est la juxtaposition des quatre chemins γ_1, γ_2, γ_3 et γ_4*

$$\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3 \vee \gamma_4$$

où γ_1 est le chemin joignant $(0,0)$ à $(1,0)$, γ_2 le chemin joignant $(1,0)$ à $(1,1)$,
γ_3 est le chemin joignant $(1,1)$ à $(0,1)$ et γ_4 le chemin joignant $(0,1)$ à $(0,0)$.
Calculons l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} |z|^2 dz = \int_{\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3 \vee \gamma_4} |z|^2 dz &= \int_{\gamma_1} |z|^2 dz + \int_{\gamma_2} |z|^2 dz + \int_{\gamma_3} |z|^2 dz + \int_{\gamma_4} |z|^2 dz \\
&= \int_{0}^{1} x^2dx + i\int_{0}^{1} (1+y^2)dy + \int_{1}^{0} (x^2+1)dx + i\int_{1}^{0} y^2dy \\
&= \int_{0}^{1} x^2dx + i\int_{0}^{1} (1+y^2)dy - \int_{0}^{1} (x^2+1)dx - i\int_{0}^{1} y^2dy = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}i - \frac{4}{3} - \frac{1}{3}i = -1+i.
\end{aligned}$$

Solution 3 *Pour le calcul des intégrales, on utilise la formule*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Calculons l'intégrale

$$\int_{\gamma_1} \overline{z}dz = \int_{0}^{\pi} e^{-it}(ie^{it}dt) = i\int_{0}^{\pi} dt = \pi i.$$

Calculons l'intégrale

$$\int_{\gamma_2} (z+1)dz = \int_{0}^{1} ((1+i)t+1)d(1+i)t = \int_{0}^{1} ((1+i)^2 t + (1+i))dt = 1+2i.$$

Calculons l'intégrale

$$\int_{\gamma_3} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{0}^{\pi/4} \frac{d(e^{it})}{1+e^{2it}} = \int_{0}^{\pi/4} \frac{ie^{it}dt}{1+e^{2it}} = \frac{1}{2}i\int_{0}^{\pi/4} \frac{dt}{\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}} = \frac{1}{2}i\int_{0}^{\pi/4} \frac{dt}{\cos t}$$

$$= \frac{1}{2}i\left[\ln\left|tg(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4})\right|\right]_{0}^{\pi/4} = \frac{1}{2}i\ln\left|tg(\frac{3\pi}{8})\right|.$$

Solution 4 *Pour le calcul de l'intégrale, on utilise la formule*

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \begin{cases} 2\pi i f(z_0) & si \;\; z_0 \;\; est \text{ à } l'intérieur \; de \; \gamma \\ 0 & si \; z_0 \;\; est \text{ à } l'extérieur \; de \; \gamma \end{cases}$$

1) Calculons l'intégrale

$$I = \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2-5iz-6} = \int_{\gamma} \frac{dz}{(z-2i)(z-3i)} = i\int_{\gamma} \frac{dz}{z-2i} - i\int_{\gamma} \frac{dz}{z-3i} = 2\pi i\,(i) - 0 = -2\pi.$$

2) Calculons l'intégrale

$$I=\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z^2-5iz-6}=\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{(z-2i)(z-3i)}=i\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z-2i}-i\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z-3i}=2\pi i\,(i)-2\pi i\,(i)=0.$$

Solution 5 *Le chemin γ dans $\mathbb{C}$ d'image Γ*

$$\begin{array}{cccc}\gamma: & [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \gamma(t)=a\cos t+ib\sin t\end{array}.$$

Calculons par deux méthodes l'intégrale

$$\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z}=2\pi i$$

et

$$\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z}=\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{d(a\cos t+ib\sin t)}{a\cos t+ib\sin t}=\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{-a\sin t+ib\cos t}{a\cos t+ib\sin t}dt=\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{(b^2-a^2)\sin t\cos t+iab}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}dt.$$

Des deux valeurs de l'intégrale, on en déduit

$$\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dt}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}=\frac{2\pi}{ab}.$$

Solution 6 *1) On va calculer les deux intégrales*

- en utilisant la formule

$$\int\limits_{\gamma}f(z)dz=\int\limits_{a}^{b}f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

on calcule les intégrales

$$I_1 = \int\limits_\gamma \left[2 + z + \frac{1}{z}\right] \frac{f(z)}{z} dz = i \int\limits_0^{2\pi} \left[2 + e^{it} + e^{-it}\right] f(e^{it}) dt = i \int\limits_0^{2\pi} \left[2(1 + \cos t)\right] f(e^{it}) dt$$

$$= 4i \int\limits_0^{2\pi} \cos^2(t/2) f(e^{it}) dt$$

et

$$I_2 = \int\limits_\gamma \left[2 - z - \frac{1}{z}\right] \frac{f(z)}{z} dz = i \int\limits_0^{2\pi} \left[2 - e^{it} - e^{-it}\right] f(e^{it}) dt = i \int\limits_0^{2\pi} \left[2(1 - \cos t)\right] f(e^{it}) dt$$

$$= 4i \int\limits_0^{2\pi} \sin^2(t/2) f(e^{it}) dt$$

- *en utilisant les formules intégrales de Cauchy*

$$\int\limits_\gamma f(z) dz = 0$$

si γ *est fermé (un lacet) et*

$$\int\limits_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} 2\pi i f(z_0) & si \;\; z_0 \;\; est \text{ à } l'intérieur \; de \; \gamma \\ 0 & si \; z_0 \;\; est \text{ à } l'extérieur \; de \; \gamma \end{cases}$$

et

$$\int\limits_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) & si \;\; z_0 \;\; est \text{ à } l'intérieur \; de \; \gamma \\ 0 & si \;\; z_0 \;\; est \text{ à } l'extérieur \; de \; \gamma \end{cases} , \quad \forall n \geq 1.$$

on calcule les intégrales

$$I_1 = \int_\gamma \left[2 + z + \frac{1}{z}\right] \frac{f(z)}{z} dz = 2\int_\gamma \frac{f(z)}{z} dz + \int_\gamma f(z) dz + \int_\gamma \frac{f(z)}{z^2} dz$$
$$= 2(2\pi i f(0)) + 0 + \frac{2\pi i}{1!} f'(0) = 2\pi i \left[2f(0) + f'(0)\right]$$

et

$$I_2 = \int_\gamma \left[2 - z - \frac{1}{z}\right] \frac{f(z)}{z} dz = 2\int_\gamma \frac{f(z)}{z} dz - \int_\gamma f(z) dz - \int_\gamma \frac{f(z)}{z^2} dz$$
$$= 2(2\pi i f(0)) - 0 - \frac{2\pi i}{1!} f'(0) = 2\pi i \left[2f(0) - f'(0)\right]$$

2) des deux valeurs des intégrales, on en déduit

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2(t/2) dt = 2f(0) + f'(0) \quad et \quad \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \sin^2(t/2) dt = 2f(0) - f'(0).$$