Série V

Exercise 1 *Développer les fonctions données en série de Taylor en utilisant les développements existants et trouver les rayons de convergence des séries :*

$\frac{1}{3-2z}$	*suivant les puissances de*	$z-3$
$\frac{1}{z^2-2z-3}$	*suivant les puissances de*	z
$\sin(2z+1)$	*suivant les puissances de*	$z+1$
e^z	*suivant les puissances de*	$2z-1$
$Log\,(2-z)$	*suivant les puissances de*	z

Exercise 2 *Développer en série de Laurent les fonctions dans les couronnes indiquées :*

$$f(z)=\frac{1}{\left(z^2-1\right)^2}\ , \qquad 0<|z-1|<2$$

$$f(z)=\frac{1}{z^2+1}\ , \qquad 0<|z-i|<2$$

$$f(z)=\frac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}\ , \qquad a)\ |z|<1 \qquad b)\ 1<|z|<2 \qquad c)\ 2<|z|<+\infty$$

Exercise 3 *Trouver les zéros des fonctions et déterminer leurs leurs ordres :*

$$f(z)=1+\cos z\ \ ;\quad f(z)=1-e^z\ \ ;\ \ f(z)=z^4+4z^2\ \ ;\ \ f(z)=\frac{\sin z}{z}.$$

Exercise 4 *Trouver l'ordre du zéro $z_0=0$ pour les fonctions :*

$$\frac{z^8}{z-\sin z}\quad ;\quad \frac{z^3}{1+z-e^z}\quad ;\quad z^2\left(e^{z^2}-1\right).$$

Exercise 5 *Déterminer le caractère du point singulier $z_0=0$ pour les fonctions :*

$$f(z)=\frac{1}{z-\sin z}\ ;\ \ f(z)=\frac{1}{\cos z+\frac{z^2}{2}-1}\ ;\quad f(z)=\frac{\sin z}{e^{-z}+z-1}.$$

Exercise 6 *Trouver les points singuliers et déterminer leurs caractères :*

$$\frac{1}{1-\sin z} \quad ; \frac{1-\cos z}{z^2} \quad ; \; e^{\frac{1}{z+2}} \;\; ; \cos\left(\frac{1}{z}\right) \quad ; \quad \frac{z}{z^5+2z^4+z^3} \; ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{z+1}\right).$$

Solutions de la série V

Solution 1 *En utilisant le développement connu,* $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ *avec* $R = 1$*, on a :*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3-2z} &= \frac{1}{3-2(z-3+3)} = \frac{1}{-3-2(z-3)} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{3}(z-3)}\right) \\
&= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}(z-3)\right)^n \quad = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^{n+1}\frac{2^n}{3^{n+1}}\right](z-3)^n
\end{aligned}$$

$$\textit{avec} \quad R = \frac{3}{2} \quad \textit{car} \quad \left|\frac{2}{3}(z-3)\right| < 1 \Longleftrightarrow |z-3| < \frac{3}{2}$$

En utilisant le développement connu, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ *avec* $R = 1$*, on a :*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2-2z-3} &= \frac{1}{(z+1)(z-3)} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+z} - \frac{1}{4}\frac{1}{z-3} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+z} + \frac{1}{12}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-z)^n + \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n \quad = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n + \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{4} + \frac{1}{12}\frac{1}{3^n}\right]z^n
\end{aligned}$$

$$\textit{avec } R = \min(R_1, R_2) = \min(1,3) = 1 \;\; \textit{car} \;\; |z| < 1 = R_1 \textit{et} \quad \left|\frac{z}{3}\right| < 1 \Longleftrightarrow |z| < 3 = R_2.$$

En utilisant le développement connu, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ *avec* $R = +\infty$*, on a :*

$$\begin{aligned}
\sin(2z+1) &= \frac{e^{i(2z+1)} - e^{-i(2z+1)}}{2i} = \frac{e^{i(2z+2-1)} - e^{-i(2z+2-1)}}{2i} = \frac{e^{-i}e^{2i(z+1)} - e^{i}e^{-2i(z+1)}}{2i} \\
&= \frac{e^{-i}}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2i(z+1))^n}{n!} - \frac{e^{i}}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2i(z+1))^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(\frac{e^{-i}}{2i}\right)\left(\frac{(2i)^n}{n!}\right) - \left(\frac{e^{i}}{2i}\right)\left(\frac{(-2i)^n}{n!}\right)\right](z+1)^n \qquad \textit{avec} \quad R = +\infty.
\end{aligned}$$

En utilisant le développement connu, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ *avec* $R = +\infty$*, on a :*

$$\begin{aligned}
e^z = e^{\frac{(2z-1+1)}{2}} = e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}(2z-1)} &= e^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\frac{1}{2}(2z-1))^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2^n n!}\right](2z-1)^n \qquad \textit{avec} \quad R = +\infty.
\end{aligned}$$

En utilisant le développement connu, $Log\,(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ *avec* $R = 1$*, on a :*

$$\begin{aligned}
Log\,(2-z) &= Log 2(1-\frac{z}{2}) = \ln 2 + Log(1-\frac{z}{2}) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-\frac{z}{2})^n \\
&= \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-1}{2^n n}\right)z^n \qquad \textit{avec} \quad R = 2 \quad \textit{car} \quad \left|-\frac{z}{2}\right| < 1 \Longleftrightarrow |z| < 2.
\end{aligned}$$

$$a_0 = \ln 2 \qquad \textit{et} \quad a_n = \frac{-1}{2^n n}, \quad n \geq 1.$$

Solution 2

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\left(z^2-1\right)^2} &= \left(\frac{1}{(z-1)(z+1)}\right)^2 = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)\right]^2 \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)(z+1)} + \frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)^2} \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)^2} \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(z-1+1)+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{((z-1+1)+1)^2} \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{8}\frac{1}{1+(\frac{z-1}{2})} + \frac{1}{16}\frac{1}{(1+(\frac{z-1}{2}))^2} \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{z-1}{2})^n - \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{-1}{2})n(-\frac{z-1}{2})^{n-1} \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{1}{2})^n(z-1)^n - \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{1}{2})^n n(z-1)^{n-1} \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{1}{2})^n(z-1)^n - \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{1}{2})^{n+1}(n+1)(z-1)^n \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2^{n+3}} + \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{2^{n+3}}(n+1)\right](z-1)^n \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2^{n+4}}(n+3)\right](z-1)^n \\
&= \sum_{n=-2}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2^{n+4}}(n+3)\right](z-1)^n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f\left(z\right) &= \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i}\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i}\frac{1}{(z-i+i)+i} \\
&= \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i}\frac{1}{(z-i)+2i} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+(\frac{z-i}{2i})} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{z-i}{2i})^n \\
&= \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{1}{2i})^n(z-i)^n = \sum_{n=-1}^{+\infty}\left[-(-\frac{1}{2i})^{n+2}\right](z-i)^n
\end{aligned}
$$

$$f(z) = \frac{z^2 - z + 3}{z^3 - 3z + 2} = \frac{z^2 - z + 3}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{z^2 - 2z + 1 + z + 2}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{1}{(z+2)} + \frac{1}{(z-1)^2}$$

Dans la couronne : $|z| < 1$ *on a :* $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)} + \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1+\frac{z}{2})} + \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{z}{2})^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + (n+1)\right] z^n$$

Dans la couronne : $1 < |z| < 2$ *on a :* $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ *et* $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)} + \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1+\frac{z}{2})} + \frac{1}{z^2}\frac{1}{(1-\frac{1}{z})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{z}{2})^n + \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}}$$

Dans la couronne : $2 < |z| < +\infty$ *on a :* $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$ *et* $\left|\frac{1}{z}\right| < \left|\frac{2}{z}\right| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)} + \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{z}\frac{1}{(1+\frac{2}{z})} + \frac{1}{z^2}\frac{1}{(1-\frac{1}{z})^2}$$

$$= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{2}{z})^n + \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}}$$

Solution 3 *On a,*

$$f(z) = 0 \iff 1 + \cos z = 0 \iff \cos z = -1 \iff z_k = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$et \quad f'(z_k) = -\sin(z_k) = 0, \ \forall k \in \mathbb{Z} \quad et \quad f''(z_k) = -\cos(z_k) = 1 \neq 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

et donc les zéros de f *sont les points* $z_k = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ *et ils sont d'ordre 2.*

On a,

$$f(z) = 0 \iff 1 - e^z = 0 \iff e^z = 1 = e^{2k\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z} \iff z_k = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$et \quad f'(z_k) = -e^{z_k} = -1 \neq 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

et donc les zéros de f *sont les* $z_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ *et ils sont d'ordre 1 (zéros simples).*

On a,

$$f(z) = 0 \Longleftrightarrow z^4 + 4z^2 = 0 \Longleftrightarrow z^2(z^2+4) = 0 \Longleftrightarrow z_1 = 0, z_2 = 2i \quad et \quad z_3 = -2i.$$

Pour $z_1 = 0$,

$$f(z) = z^2(z^2+4) = z^2 g(z) \quad et \quad g(z_1) = g(0) = 4 \neq 0$$

et donc $z_1 = 0$ *est un zéro d'ordre 2 pour* f.

Pour $z_2 = 2i$,

$$f(z) = (z-2i)\left[z^2(z+2i)\right] = (z-2i)g(z) \quad et \quad g(z_2) = g(2i) = -16i \neq 0$$

et donc $z_2 = 2i$ *est un zéro d'ordre 1 (zéro simple) pour* f.

Pour $z_3 = -2i$,

$$f(z) = (z+2i)\left[z^2(z-2i)\right] = (z+2i)g(z) \quad et \quad g(z_3) = g(-2i) = 16i \neq 0$$

et donc $z_3 = -2i$ *est un zéro d'ordre 1 (zéro simple) pour* f.

On a,

$$f(z) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\sin z}{z} = 0 \Longleftrightarrow \sin z = 0 \ et \ \ z \neq 0 \Longleftrightarrow z_k = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}^*$$
$$et \quad f'(z_k) = \frac{z_k \cos z_k - \sin z_k}{(z_k)^2} = \frac{(-1)^k}{k\pi} \neq 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*$$

et donc les zéros de f *sont les* $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$ *et ils sont d'ordre 1 (zéros simples).*

Pour $z = 0$,

$$f(z) = \frac{1}{z}\sin z = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} \quad et \quad f(0) = 1 \neq 0$$

et donc $z = 0$ *n'est pas un zéro pour* f.

Solution 4 *On a,*

$$f(z)=\frac{z^8}{z-\sin z}=\frac{z^8}{z-\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}=\frac{z^8}{-\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}=\frac{z^8}{-(-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+...)}$$
$$=\left(\frac{z^8}{z^3}\right)\left(\frac{1}{(\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}-...)}\right)=z^5g(z)\quad et\quad g(z_0)=g(0)=\frac{1}{\frac{1}{3!}}=6\neq 0$$

et donc $z_0=0$ est un zéro d'ordre 5 pour f.

On a,

$$f(z)=\frac{z^3}{1+z-e^z}=\frac{z^3}{1+z-\sum\limits_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}}=\frac{z^3}{-\sum\limits_{n\geq 2}\frac{z^n}{n!}}=\frac{z^3}{-(\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+...)}$$
$$=\left(\frac{z^3}{z^2}\right)\left(\frac{1}{-\frac{1}{2!}-\frac{z}{3!}-\frac{z^2}{4!}-...)}\right)=zg(z)\quad et\quad g(z_0)=g(0)=-\frac{1}{\frac{1}{2!}}=-2\neq 0$$

et donc $z_0=0$ est un zéro d'ordre 1 pour f.

On a,

$$f(z)=\ z^2\left(e^{z^2}-1\right)=\ z^2\left(\sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n}}{n!}-1\right)=z^2\left(\sum_{n\geq 1}\frac{z^{2n}}{n!}\right)=z^2(\frac{z^2}{1!}+\frac{z^4}{2!}+\frac{z^6}{3!}+...)$$
$$=z^4(\frac{1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{3!}+...)=z^4g(z)\quad et\quad g(z_0)=g(0)=1\neq 0$$

et donc $z_0=0$ est un zéro d'ordre 4 pour f.

Solution 5 *Considérons la fonction* $g(z) = \frac{1}{f(z)} = z - \sin z,$ *on a,*

$$g'(z) = 1 - \cos z, \quad g''(z) = \sin z \quad et \quad g'''(z) = \cos z$$

d'où

$$g'(0) = 0, \quad g''(0) = 0 \quad et \quad g'''(0) = 1 \neq 0$$

et donc $z_0 = 0$ *est un zéro d'ordre* 3 *pour* g *c'est-à-dire un pôle d'ordre* 3 *pour* f.

Considérons la fonction $g(z) = \frac{1}{f(z)} = \cos z + \frac{z^2}{2} - 1,$ *on a,*

$$g'(z) = -\sin z + z, \quad g''(z) = -\cos z + 1, \; g'''(z) = \sin z \quad et \quad g^{(4)}(z) = \cos z$$

d'où

$$g'(0) = g''(0) = g'''(0) = 0 \quad et \; g^{(4)}(0) = 1 \neq 0$$

et donc $z_0 = 0$ *est un zéro d'ordre* 4 *pour* g *c'est-à-dire un pôle d'ordre* 4 *pour* f.

Considérons la fonction $g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{e^{-z}+z-1}{\sin z},$ *on a,*

$$\begin{aligned} g(z) = \frac{e^{-z}+z-1}{\sin z} &= \frac{\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n \frac{z^n}{n!} + z - 1}{\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \frac{\frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} - ...}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + ...} \\ &= \left(\frac{z^2}{z}\right)\left(\frac{\frac{1}{2!} - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} - \frac{z^3}{5!} + \frac{z^4}{6!} - ...}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + ...}\right) = zh(z) \quad et \quad h(0) = \frac{1}{2!} \neq 0 \end{aligned}$$

donc $z_0 = 0$ *est un zéro d'ordre* 1 *pour* g *c-à-d un pôle d'ordre* 1*(pôle simple) pour* f.

AUTRE METHODE :

$z_0 = 0$ *est un zéro d'ordre* 2 *pour* $e^{-z} + z - 1$ *et un zéro d'ordre* 1 *pour* $\sin z$,

donc un zéro d'ordre $2 - 1 = 1$ *pour* $g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{e^{-z}+z-1}{\sin z}$,

c'est-à-dire un pôle d'ordre 1*(pôle simple) pour* f.

Solution 6 *On a, les points singuliers de* $f(z) = \frac{1}{1-\sin z}$ *sont les points* z *tels que*

$$1 - \sin z = 0 \Longleftrightarrow \sin z = 1 \Longleftrightarrow z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = (4k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

et donc, les points singuliers de $f(z) = \frac{1}{1-\sin z}$ *sont les points* $z_k = (4k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$*.*
Déterminons leurs caractères, pour celà considérons la fonction $g(z) = \frac{1}{f(z)} = 1 - \sin z$*,*
on a,

$$\begin{aligned} & g'(z) = -\cos z, \quad g''(z) = \sin z \\ \text{d'où } & g'(z_k) = g'\left((4k+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad g''(z_k) = g''\left((4k+1)\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

et donc les points singuliers $z_k = (4k+1)\frac{\pi}{2}$*,* $k \in \mathbb{Z}$ *sont des zéros d'ordre* 2 *pour* g
c'est-à-dire des pôles d'ordre 2 *pour* f*.*
On a, les points singuliers de $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$ *sont les points* z *tels que* $z^2 = 0$*,*

$$z^2 = 0 \Longleftrightarrow z = 0$$

et donc, le seul point singulier de $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$ *est le point* $z = 0$*.*
Déterminons son caractère ,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1 - \sum\limits_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}}{z^2} = \frac{z^2 \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \frac{z^8}{8!} + ...\right)}{z^2} \\ &= \left(\frac{z^2}{z^2}\right)\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \frac{z^6}{8!} + ...\right) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \frac{z^6}{8!} + ... \\ \text{et} \quad \lim_{z\to 0} f(z) &= \lim_{z \to 0}\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \frac{z^6}{8!} + ...\right) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \quad \text{existe} \end{aligned}$$

et donc le point singulier $z = 0$ *est un point singulier apparent pour* f*.*
On a, les points singuliers de $f(z) = e^{\frac{1}{z+2}}$ *sont les points* z *tels que* $z + 2 = 0$*,*

$$z + 2 = 0 \Longleftrightarrow z = -2$$

et donc, le seul point singulier de $f(z) = e^{\frac{1}{z+2}}$ *est le point* $z = -2$.

Déterminons son caractère,

$$f(z) = e^{\frac{1}{z+2}} = \sum_{n\geq 0} \frac{\left(\frac{1}{z+2}\right)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(z+2)^{-n}$$

et comme la série de Laurent de f *au voisinage de* $z = -2$ *contient une infinité de termes,*

$(z+2)^{-n}$, $n \geq 1$, *de puissances négatives, le point singulier* $z = -2$

est un point singulier essentiel pour f.

On a, les points singuliers de $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ *sont les points* z *tels que* $z = 0$,

et donc, le seul point singulier de f *est le point* $z = 0$.

Déterminons son caractère,

$$f(z) = \cos\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{-2n}$$

et comme la série de Laurent de f *au voisinage de* $z = 0$ *contient une infinité*

de termes, z^{-2n}, $n \geq 1$, *de puissances négatives, le point singulier* $z = 0$

est un point singulier essentiel pour f.

On a,

$$f(z) = \frac{z}{z^5 + 2z^4 + z^3} = \left(\frac{z}{z^3}\right)\left(\frac{1}{z^2 + 2z + 1}\right) = \frac{1}{z^2}\frac{1}{(z+1)^2}$$

et donc les points singuliers de f *sont les points* z *tels que* $z^2(z+1)^2 = 0$

c'est-à-dire $z_1 = 0$ *et* $z_2 = -1$.

Déterminons leurs caractères,

Pour $z_1 = 0$, *on a,*

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left[\frac{1}{(z+1)^2}\right] = \frac{1}{z^2} g(z) \quad \textit{avec} \quad g(z_1) = g(0) = 1 \neq 0$$

et donc le point singulier $z_1 = 0$ *est un pôle d'ordre* 2 *pour* f.

Pour $z_2 = -1$, *on a,*

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2}\left[\frac{1}{z^2}\right] = \frac{1}{(z+1)^2}g(z) \quad \textit{avec} \quad g(z_2) = g(-1) = 1 \neq 0$$

et donc le point singulier $z_2 = -1$ *est un pôle d'ordre* 2 *pour* f.

On a, les points singuliers de $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{z+1}\right)$ *sont les points* z *tels que* $z + 1 = 0$,

et donc, le seul point singulier de f *est le point* $z = -1$.

Déterminons son caractère,

$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{z+1}\right) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{\left(\frac{\pi}{z+1}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}(z+1)^{-(2n+1)}$$

et comme la série de Laurent de f *au voisinage de* $z = -1$ *contient une infinité de termes,*

$(z+1)^{-(2n+1)}$, $n \geq 0$, *de puissances négatives, le point singulier* $z = -1$

est un point singulier essentiel pour f.