Série VI

Exercise 1 *Calculer les résidus au point $z = 0$ des fonctions suivantes :*

$$\frac{z^{n-1}}{\sin^n z} \;;\; \frac{\sin 2z - 2z}{(1-\cos z)^2} \;;\; \frac{e^z - z - 1}{(1-\cos 2z)\sin z} \;;\; \frac{z^2}{chz - \frac{z^2}{2} - 1}.$$

Exercise 2 *Trouver les résidus des fonctions suivantes en leurs points singuliers :*

$$\frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)} \;;\; \frac{1}{z^4+1} \;;\; z^3 \sin(\frac{1}{z^2}) \;;\; \cos z \sin(\frac{1}{z}) \;;\; z^2 \sin(\frac{1}{z+1}).$$

Exercise 3 *Calculer les intégrales suivantes :*

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz \;;\; \int\limits_{|z|=2} tg(z) dz \;;\; \int\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1} dz \;;\; \int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin(\frac{1}{z}) dz.$$

Exercise 4 *Calculer par la méthode des résidus les intégrales suivantes :*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2} \;; \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$$

Exercise 5 *Même question que (4).*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}; \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$$

Exercise 6 *Même question que (4).*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx.$$

Exercise 7 *Calculer par la méthode des résidus la somme :*

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$$

où $a \neq 0$.

Exercise 8 *Soit la fonction,*

$$f(z) = z^4 + \sin(z).$$

Trouver l'augmentation de l'argument de $f(z)$ *lorsque* z *décrit une fois le cercle de centre* 0 *et de rayon* 3 *dans le sens direct.*

Exercise 9 *Trouver le nombre de zéros de la fonction*

$$f(z) = z^5 + 5z^3 + z - 2.$$

1- Dans le disque $D_1(0)$.

2- Dans le disque $D_3(0)$.

Exercise 10 *Soit le polynôme*

$$P_n(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + ... + c_1 z + c_0$$

où $c_{n-1}, ..., c_1, c_0 \in \mathbb{C}$.

Montrer qu'il existe b *dans le cercle* $C(0,1)$ *tel que*

$$|P(b)| \geq 1.$$

Solutions de la série VI

Solution 1 *1- Déterminons le caractère du point $z=0$ pour la fonction $f(z)=\frac{z^{n-1}}{\sin^n z}$:*

$$f(z)=\frac{z^{n-1}}{\sin^n z}=\frac{z^{n-1}}{\left(\sum\limits_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}\right)^n}=\frac{z^{n-1}}{\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+...\right)^n}$$

$$=\left(\frac{z^{n-1}}{z^n}\right)\left(\frac{1}{\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+...\right)^n}\right)=\frac{1}{z}g(z)\quad avec\ \ g(0)=1\neq 0.$$

D'où $z=0$ est un pôle d'ordre 1 pour f.

Calculons le résidu au point $z=0$ de f :

$$Rés(f,0)=\lim_{z\to 0}\left[(z-0)\,f(z)\right]=\lim_{z\to 0}\left[z\frac{z^{n-1}}{\sin^n z}\right]=\lim_{z\to 0}\left[\frac{z^n}{\sin^n z}\right]=1.$$

2- Déterminons le caractère du point $z=0$ pour la fonction $f(z)=\frac{\sin 2z-2z}{(1-\cos z)^2}$:

$$f(z)=\frac{\sin 2z-2z}{(1-\cos z)^2}=\frac{\sum\limits_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2z)^{2n+1}-2z}{\left(1-\sum\limits_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}\right)^2}=\frac{\left(2z-\frac{(2z)^3}{3!}+\frac{(2z)^5}{5!}-...\right)-2z}{\left(1-(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-...\right)^2}$$

$$=\frac{-\frac{(2z)^3}{3!}+\frac{(2z)^5}{5!}-...}{\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+...\right)^2}=\left(\frac{z^3}{z^4}\right)\left(\frac{-\frac{2^3}{3!}+\frac{2^5z^2}{5!}-...}{\left(\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+...\right)^2}\right)=\frac{1}{z}g(z)\qquad avec\ \ g(0)=\frac{-\frac{2^3}{3!}}{\left(\frac{1}{2!}\right)^2}=-\frac{16}{3}\neq 0.$$

D'où $z=0$ est un pôle d'ordre 1 pour f.

Calculons le résidu au point $z=0$ de f :

$$Rés(f,0)=\lim_{z\to 0}\left[(z-0)\,f(z)\right]=\lim_{z\to 0}\left[z\left(\frac{1}{z}g(z)\right)\right]=\lim_{z\to 0}\left[g(z)\right]=g(0)=-\frac{16}{3}.$$

3- Déterminons le caractère du point $z = 0$ pour la fonction $f(z) = \frac{e^z - z - 1}{(1-\cos 2z)\sin z}$:

$$f(z) = \frac{e^z - z - 1}{(1-\cos 2z)\sin z} = \frac{\sum\limits_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} - z - 1}{\left(1 - \sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2z)^{2n}\right)\left(\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}\right)}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ...\right) - z - 1}{\left(1 - (1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} ...)\right)\left(z - \frac{z^3}{3!} + ...\right)} = \frac{\frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} ...}{\left(\frac{(2z)^2}{2!} - \frac{(2z)^4}{4!} + ...\right)\left(z - \frac{z^3}{3!} + ...\right)}$$

$$= \left(\frac{z^2}{z^3}\right)\left(\frac{\frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} ...}{\left(\frac{2^2}{2!} - \frac{2^4 z^2}{4!} - ...\right)\left(1 - \frac{z^2}{3!} + ...\right)}\right) = \frac{1}{z} g(z) \quad \textit{avec} \ \ g(0) = \frac{\frac{1}{2!}}{\left(\frac{2^2}{2!}\right)} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

D'où $z = 0$ est un pôle d'ordre 1 pour f.

Calculons le résidu au point $z = 0$ de f :

$$R\acute{e}s(f, 0) = \lim_{z\to 0} \left[(z - 0) f(z)\right] = \lim_{z\to 0} \left[z \left(\frac{1}{z} g(z)\right)\right] = \lim_{z\to 0} \left[g(z)\right] = g(0) = \frac{1}{4}.$$

4- Déterminons le caractère du point $z = 0$ pour la fonction $f(z) = \frac{z^2}{chz - \frac{z^2}{2} - 1}$:

$$f(z) = \frac{z^2}{chz - \frac{z^2}{2} - 1} = \frac{z^2}{\sum\limits_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!} - \frac{z^2}{2} - 1} = \frac{z^2}{\left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + ...\right) - \frac{z^2}{2} - 1}$$

$$= \frac{z^2}{\frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + ...} = \left(\frac{z^2}{z^4}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{4!} + \frac{z^2}{6!} + ...}\right) = \frac{1}{z^2} g(z) \quad \textit{avec} \ \ g(0) = \frac{1}{\left(\frac{1}{4!}\right)} = 24 \neq 0.$$

D'où $z = 0$ est un pôle d'ordre 2 pour f.

Calculons le résidu au point $z = 0$ de f :

$$R\acute{e}s(f, 0) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 0} \frac{d^{(2-1)}}{dz^{(2-1)}} \left[(z - 0)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \left[z^2 \left(\frac{1}{z^2} g(z)\right)\right]$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \left[g(z)\right] = \lim_{z\to 0} \left(\frac{-2\frac{z}{6!} - ...}{\left(\frac{1}{4!} + \frac{z^2}{6!} + ...\right)^2}\right) = 0.$$

Remarque : le résidu au point $z = 0$ d'une fonction paire est égal à zéro.

Solution 2 *1- Cherchons les points singuliers de $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$.*

Les points singuliers de f *sont :* $z_1 = -1$ *un pôle d'ordre* 3 *et* $z_2 = 2$ *un pôle d'ordre* 1.

Trouvons les résidus de f *en ses points singuliers :* $Rés(f,-1) = -\frac{17}{54e}$ *et* $Rés(f,2) = \frac{e^3}{27}$.

2- Cherchons les points singuliers de $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$.

Points singuliers de f *:* $z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i}$, $z_2 = e^{\frac{3\pi}{4}i}$, $z_3 = e^{\frac{5\pi}{4}i}$ *et* $z_4 = e^{\frac{7\pi}{4}i}$ *, des pôles d'ordre* 1.

Trouvons les résidus de f *en ses points singuliers :*

$Rés(f,z_1) = \frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$, $Rés(f,z_2) = \frac{1}{4}e^{-\frac{9\pi}{4}i}$, $Rés(f,z_3) = \frac{1}{4}e^{\frac{9\pi}{4}i}$ *et* $Rés(f,z_4) = \frac{1}{4}e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

3- Cherchons les points singuliers de $f(z) = z^3 \sin(\frac{1}{z^2})$.

Le seul point singulier de f *est :* $z_1 = 0$ *un point singulier essentiel.*

Trouvons le résidu de f *en son point singulier :* $Rés(f,0) = 0$.

4- Cherchons les points singuliers de $f(z) = \cos z \sin(\frac{1}{z})$.

Le seul point singulier de f *est :* $z_1 = 0$ *un point singulier essentiel.*

Trouvons le résidu de f *en son point singulier :* $Rés(f,0) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!(2n+1)!}$.

5- Cherchons les points singuliers de $f(z) = z^2 \sin(\frac{1}{z+1})$. *On a :*

$$\begin{aligned}
f(z) = \; & z^2 \sin(\frac{1}{z+1}) = (z+1-1)^2 \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z+1}\right)^{2n+1} \\
& = \left((z+1)^2 - 2(z+1) + 1\right) \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{3!(z+1)^3} + \frac{1}{5!(z+1)^5} - ...\right) \\
& = \left(1 - \frac{1}{3!}\right) \frac{1}{z+1} + \frac{2}{3!} \frac{1}{(z+1)^2} + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{3!}\right) \frac{1}{(z+1)^3} - ... + (-2 + (z+1)).
\end{aligned}$$

Le seul point singulier de f *est :* $z_1 = -1$ *un point singulier essentiel.*

Trouvons le résidu de f *en son point singulier :* $Rés(f,-1) = 1 - \frac{1}{3!} = \frac{5}{6}$.

Solution 3

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i(Rés(f, 0) + Rés(f, -1)) = 2\pi i(0 + (1 - e^{-1})) = 2\pi i(1 - e^{-1}).$$

$$\int\limits_{|z|=2} tg(z) dz = 2\pi i(Rés(f, \frac{\pi}{2}) + Rés(f, -\frac{\pi}{2})) = 2\pi i(-1 - 1) = -4\pi i.$$

$$\int\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i(Rés(f, i) + Rés(f, 0)) = 2\pi i(\frac{e^{-1}}{2i} + 0)) = \pi e^{-1}.$$

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z - 1} \sin(\frac{1}{z}) dz = 2\pi i(Rés(f, 1) + Rés(f, 0)) = 2\pi i(\sin(1) - \sin(1)) = 0.$$

Solution 4 *1- L'intégrale* $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2}$ *est de la forme* $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$ *où* R *est une fonction rationnelle en* $\sin\theta$ *et* $\cos\theta$*. L'intégrale* $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2}$ *est convergente car la fonction* $\frac{1}{(2+\cos\theta)^2}$ *est bornée dans l'intervalle* $[0, 2\pi]$

En posant $z = e^{i\theta}$, *on obtient :*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta \quad \text{et} \quad \gamma = C(0,1)$$

et

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2} = \int_\gamma \frac{dz}{iz\left(2 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^2} = \int_\gamma f(z)dz \quad \text{avec} \quad f(z) = \frac{1}{iz\left(2 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^2}.$$

Cherchons les points singuliers de f *qui sont à l'intérieur du cercle* $\gamma = C(0,1)$, *on trouve deux pôles doubles* $z_1 = -2 - \sqrt{3}$ *et* $z_2 = -2 + \sqrt{3}$ *tels que* $|z_1| = \left|-2 - \sqrt{3}\right| > 1$ *et* $|z_2| = \left|-2 + \sqrt{3}\right| < 1$, *donc* z_2 *est le seul point singulier à l'intérieur du cercle* $\gamma = C(0,1)$, *et* $Rés(f, z_2) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}i$.

En appliquant le théorème des résidus à f *et au compact* $\overline{D}(0,1)$ *dont le bord est* $\gamma = C(0,1)$, *on a,*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2} = \int_\gamma \frac{dz}{iz\left(2 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^2} = 2\pi i Rés(f, z_2) = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}.$$

2- En mettant l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$ *sous la forme* $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$, *on a,*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{d\theta_1}{1+\sin^2\theta_1} \quad (\theta = \pi - \theta_1) \qquad \Longrightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$$

et

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{d\theta_2}{1+\sin^2\theta_2} \quad (\theta=\pi+\theta_2) \quad \Longrightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$$

L'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$ *est de la forme* $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$ *où* R *est une fonction rationnelle en* $\sin\theta$ *et* $\cos\theta$*. L'intégrale* $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$ *est convergente car la fonction* $\frac{1}{1+\sin^2\theta}$ *est bornée dans l'intervalle* $[0,2\pi]$.

En posant $z=e^{i\theta}$, *on obtient :*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \quad dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta \quad \text{et} \quad \gamma = C(0,1)$$

et

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \int_{\gamma} \frac{izdz}{z^4-6z^2+1} = \int_{\gamma} f(z)dz \quad \text{avec} \quad f(z) = \frac{iz}{z^4-6z^2+1}.$$

Cherchons les points singuliers de f *qui sont à l'intérieur du cercle* $\gamma=C(0,1)$, *on trouve quatre pôles simples* $z_1 = 1+\sqrt{2}$, $z_2=-1-\sqrt{2}$, $z_3 = 1-\sqrt{2}$ *et* $z_4 = -1+\sqrt{2}$ *tels que* $|z_1|>1$, $|z_2|>1$, $|z_3|<1$ *et* $|z_4|<1$, *donc* z_3 *et* z_4 *sont les seuls points singuliers à l'intérieur de* $\gamma=C(0,1)$ *et* $Rés(f,z_3)=\frac{1}{8i\sqrt{2}}$ *et* $Rés(f,z_4)=\frac{1}{8i\sqrt{2}}$.

En appliquant le théorème des résidus à f *et au compact* $\overline{D}(0,1)$ *dont le bord est* $\gamma=C(0,1)$, *on a,*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \int_{\gamma} \frac{izdz}{z^4-6z^2+1} = 2\pi i\left(Rés(f,z_3)+Rés(f,z_4)\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{8i\sqrt{2}}+\frac{1}{8i\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Solution 5 *1- L'intégrale* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$ *est de la forme* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ *où* $P(x) = 1$ *et* $Q(x) = 1 + x^6$.

L'intégrale est convergente car $d^0Q - d^0P = 6 - 0 = 6 > 2$

et Q *n'a pas de zéros réels.*

Posons $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ *et cherchons ses points singuliers dans le demi-plan supérieur, on trouve six pôles simples* $z_k = e^{(2k+1)\frac{\pi}{6}i}$, $0 \le k \le 5$,

dont z_0, z_1 *et* z_2 *sont dans le demi-plan supérieur et*

$Rés(f, z_k) = -\frac{z_k}{6}$, $0 \le k \le 2$.

En appliquant le théorème des résidus à f *et au compact*

$$K = \left\{z = x + iy \in \mathbb{C},\ y \ge 0 \quad et \quad x^2 + y^2 \le R^2\right\} \qquad avec \quad R > \max(z_0, z_1, z_2) = 1.$$

On a,

$$\int\limits_{\partial K} f(z)dz = \int\limits_{-R}^{+R} \frac{dx}{1+x^6} + \int\limits_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^6} = 2\pi i(Rés(f, z_0) + Rés(f, z_1) + Rés(f, z_2)) = 2\pi i(-\frac{i}{3}) = \frac{2\pi}{3}.$$

Comme $(d^0Q - d^0P) > 2$, *on a* $\lim\limits_{|z|} \left|z\frac{P(z)}{Q(z)}\right| = 0$, *donc en appliquant le lemme1, on obtient :*

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^6} = 0$$

et on en déduit que,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{+R} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{2\pi}{3}.$$

2- On a $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}$.

L'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}$ *est de la forme* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ *où* $P(x) = x^2$ *et* $Q(x) = (1 + x^2)^2$.

L'intégrale est convergente car $d^0Q - d^0P = 4 - 2 = 2$ *et* Q *n'a pas de zéros* *réels.*

Posons $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ *et cherchons ses points singuliers dans le demi-plan supérieur, on trouve deux pôles doubles* $z_1 = i$ *et* $z_2 = -i$ *dont* z_1 *est dans le demi-plan supérieur et* $Rés(f, z_1) = -\frac{1}{4}i$.

En appliquant le théorème des résidus à f *et au compact*

$$K = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C},\ y \geq 0 \quad et \quad x^2 + y^2 \leq R^2 \right\} \qquad avec \quad R > |z_1| = 1.$$

On a,

$$\int_{\partial K} f(z)dz = \int_{-R}^{+R} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} + \int_{\Gamma_R} \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^2} = 2\pi i Rés(f, z_1) = 2\pi i(-\frac{i}{4}) = \frac{\pi}{2}.$$

Comme $(d^0Q - d^0P) = 2$, *on a* $\lim\limits_{|z| \to +\infty} \left| z \frac{P(z)}{Q(z)} \right| = 0$, *donc en appliquant le lemme1, on obtient :*

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^6} = 0$$

on en déduit que,

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \left[\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} \right] = \frac{\pi}{4}.$$

Solution 6 *L'intégrale* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx$ *est absolument convergente et on a,*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2} dx + \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{(1+x^2)^2} dx\right] = \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2} dx + \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2} dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2} dx\right]$$

L'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2} dx$ *est de la forme* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx$ *où* $\alpha = 1$.
L'intégrale est convergente et f *n'a pas de points singuliers réels et* $f(x) \in \mathbb{R}$ *si* $x \in \mathbb{R}$.
Posons $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ *et cherchons ses points singuliers dans le demi-plan supérieur, on trouve deux pôles doubles* $z_1 = i$ *et* $z_2 = -i$ *dont* z_1 *est dans le demi-plan supérieur et* $Rés(f(z)e^{iz}, z_1) = -\frac{i}{2e}$.
En appliquant le théorème des résidus à $f(z)e^{iz}$ *et au compact*

$$K = \left\{z = x + iy \in \mathbb{C},\ y \geq 0 \ \ et \ \ x^2 + y^2 \leq R^2\right\} \qquad avec \ \ R > |z_1| = 1.$$

On a,

$$\int\limits_{\partial K} f(z)e^{iz} dz = \int\limits_{-R}^{+R} \frac{e^{ix} dx}{(1+x^2)^2} + \int\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{iz} dz}{(1+z^2)^2} = 2\pi i Rés(f, z_1) = 2\pi i(-\frac{i}{2e}) = \frac{\pi}{e}.$$

Comme $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |f(z)| = 0$, *donc en appliquant le lemme2, on obtient :*

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{\Gamma_R} f(z)e^{iz} dz = \lim_{R \to +\infty} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{iz} dz}{(1+z^2)^2} = 0$$

et on en déduit que,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\left[\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} \frac{e^{ix}dx}{(1+x^2)^2}\right] = \frac{\pi}{2e}.$$

Solution 7 *Calculons la somme*

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$$

où $a \neq 0$.

Comme

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n^2+a^2} = \sigma$$

on a

$$\sigma' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{a^2} + 2\sigma.$$

Calculons σ' *en utilisant,*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_k Rés([\pi\cot\pi z]f(z), z_k = pôles\ de\ f)$$

avec $f(z) = (z^2+a^2)^{-1}$.

La fonction $f(z)$ *a deux pôles simples* $z_1 = +ia$, $z_2 = -ia$, *et*

$$Rés([\pi\cot\pi z](z^2+a^2)^{-1}, z_1 = ia) = \pi \lim_{z\to ia} \frac{z-ia}{z^2+a^2}\cot(\pi z) = \frac{\pi}{2ia}\cot(i\pi a) = -\frac{\pi}{2a}coth(\pi a),$$
$$Rés([\pi\cot\pi z](z^2+a^2)^{-1}, z_2 = -ia) = \pi \lim_{z\to ia} \frac{z+ia}{z^2+a^2}\cot(\pi z) = -\frac{\pi}{2ia}\cot(-i\pi a) = -\frac{\pi}{2a}coth(\pi a).$$

D'où,

$$\sigma' = -Rés([\pi\cot\pi z](z^2+a^2)^{-1}, z = ia) - Rés([\pi\cot\pi z](z^2+a^2)^{-1}, z = -ia) = \frac{\pi}{a}coth(\pi a),$$

et

$$\sigma = \frac{1}{2}\sigma' - \frac{1}{a^2} = \frac{\pi}{2a} coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2}.$$

Solution 8 *Par le principe de l'argument, l'augmentation de l'argument de $f(z)$ lorsque z décrit le cercle est égale à ($2\pi\times$) le nombre de zéros moins le nombre des pôles de $f(z)$ à l'intérieur du cercle, donc juste le nombre de zéros. Pour trouver le nombre de zéros de $f(z)$ à lintérieur du cercle, on compare $f(z)$ avec terme dominant z^4 et on applique le théorème de Rouché. Soit $g(z) = z^4$. On a, sur le cercle*

$$|f(z) - g(z)| = |\sin z| \leq \frac{|e^{iz}| + |e^{-iz}|}{2} \leq e^{|z|} = e^3 < 81 = |g(z)|.$$

Donc, $f(z)$ a le même nombre de zéros à l'intérieur du cercle que z^4, lequel est 4.
Par conséquent, l'augmentation de l'argument est $2\pi \times 4 = 8\pi$.

Solution 9 *1- On applique le théorème de Rouché sur le cercle $C(0,1)$, avec f et $g(z) = 5z^3$. On a,*

$$|f(z) - g(z)| = \left|z^5 + z - 2\right| \leq \left|z^5\right| + |z| + |2| = 4 < 5 = \left|5z^3\right| = |g(z)|, \quad |z| = 1.$$

Comme la fonction g a un seul zéro $z = 0$ de multiplicité 3 dans le disque $D_1(0)$, la fonction f a aussi trois zéros dans le disque $D_1(0)$.
2- On applique le théorème de Rouché sur le cercle $C(0,3)$, avec f et $g(z) = z^5$.
On a,

$$|f(z) - g(z)| = \left|5z^3 + z - 2\right| \leq \left|5z^3\right| + |z| + |2| = 140 < 243 = \left|z^5\right| = |g(z)|, \quad |z| = 3.$$

Comme la fonction g a un seul zéro $z = 0$ de multiplicité 5 dans le disque $D_3(0)$, la fonction f a aussi 5 zéros dans le disque $D_3(0)$.

Solution 10 *On raisonne par l'absurde, en appliquant le théorème de Rouché sur le cercle* $C(0,1)$, *avec*

$$f(z) = c_{n-1}z^{n-1} + ... + c_1 z + c_0$$

et

$$g(z) = -z^n.$$

Supposons que

$$\forall z \in C(0,1), \quad |P_n(z)| < 1.$$

Alors,

$$|f(z) - g(z)| = |P_n(z)| < 1 = |g(z)|.$$

Comme la fonction g *a un seul zéro* $z = 0$ *de multiplicité* n *dans le disque* $D_1(0)$, *le polynôme* f *a aussi* n *zéros dans le disque* $D_1(0)$. *Ce qui est absurde.*