Travaux Dirigés n⁰ 2

Exercice 1 :

Indiquer parmi ces opérateurs ceux qui obéissent à la règle de linéaireté

1) $\hat{A}f = f^*$, **2)** $\hat{B}f = \frac{1}{f}$, **3)** $\hat{C}f = f^2$, **4)** $\hat{D}f = \frac{df}{dx}$, **5)** $\hat{G}f = \int f dv$

Exercice 2:

Les opérateurs $\hat{T}a$ (translation de a) et $\hat{P}$ (parité) tel que : $\hat{T}_a f(x) = f(x+a)$, $\hat{P}f(x) = f(-x)$, démontrer :

1) $\hat{T}_a\hat{P}\hat{T}_a = \hat{P}$, **2)** $\hat{T}_a\hat{P}\hat{T}_a{}^2\hat{P}\hat{T}_a = \hat{I}$, **3)** $(\hat{I}+\hat{P})^2 = 2(\hat{I}+\hat{P})$, **4)** $[\hat{T}_a, \hat{P}] = \hat{P}(\hat{T}_a^{-1} - \hat{T}_a)$.

Exercice 3 :

1. Soient A, B et C trois opérateurs linéaires, vérifier les relations suivantes :

1) $[\hat{A}, \hat{B}+\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$, **2)** $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$

2. Soient les opérateurs $\hat{A}$, $\hat{B}$ obéissent la relation de commutation suivante : $[\hat{A}, \hat{B}] = 1$, démontrer :

$\hat{A}\hat{B}^2 = \hat{B}^2\hat{A} + 2\hat{B}$, en déduire $[\hat{A}, \hat{B}^n]$.

3. Démontrer la relation suivante grâce à la condition d'adjonction :
$(\hat{A}_1\hat{B}_1 + \hat{A}_2\hat{B}_2)^+ = (\hat{B}_1^+\,\hat{A}_1^+ + \hat{B}_2^+\,\hat{A}_2^+)$

Exercice 4 :

Soit l'opérateur $Pk = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}$ avec **k=1,2,3**.

- Calculer le commutateur $[\hat{P}_k, \hat{x}_k]$.
- Calculer le commutateur $[\hat{P}_k, \hat{x}_j]$.

Exercice 5 :

Sur l'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable, à valeurs complexes f(x) de la variable réelle **x**, on définit un produit scalaire : $\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx$

1. Calculer l'opérateur adjoint de l'opérateur **x**. Cet opérateur est-il hermitien ?
2. Calculer l'opérateur adjoint de **d/dx**. L'opérateur **id/dx** est-il hermitien ?
3. Montrer que l'opérateur **laplacien** est hermitien

Exercice 6 :

1- Soit un opérateur linéaire $\hat{A}$ ayant un vecteur propre ‘‘$|\psi\rangle$’’ et une valeur propre ‘‘a’’.

Soit un deuxième opérateur linéaire B tel que $[\hat{A},\hat{B}] = \hat{B} + 2\hat{B}\hat{A}^2$.

- Montrer que ($\hat{B}\,|\psi\rangle$) est vecteur propre de l’opérateur $\hat{A}$ et déterminer sa valeur.

2- Soient $\hat{A}$, $\hat{B}$ **et** $\hat{C}$ trois opérateurs. Exprimer le commutateur du produit $\hat{A}\,.\,\hat{B}$ et $\hat{C}$ en fonction des commutateurs $[\hat{A},\hat{C}]$ et $[\hat{B},\hat{C}]$

Exercice 7 :

I) Soit la matrice $\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1- & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

1) Donner le format de *A*

2) Donner la valeur de chacun des éléments a_{14}, a_{23}, a_{33} et a_{32}

3) La matrice A est-elle inversible ?

4) Si A est inversible, déterminer l’inverse de *A* : A^{-1}

5) Déterminer les valeurs propres de la matrice

II) Soit la matrice : $\hat{B} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

- Déterminer les vecteurs propres associés aux valeurs propres de la matrice

Exercice 8 :

Ecrire la matrice représentative de l’opérateur $\hat{A} = \dfrac{d}{dx}$, sur la base des fonctions e^{inwx} **, w=2π/T.**

n: nombre entier compris entre -2 et +2.

Corrigé Type de Travaux Dirigés n⁰ 2

Exercice 1 :

f(x) et *g(x)* deux fonctions et A opérateur, On définit la règle de linéaireté comme :

$$\hat{A}(\alpha.f(x)+\beta.g(x)) \overset{?}{=} \alpha.\left(\hat{A}f(x)\right)+\beta.\left(\hat{A}.g(x)\right)$$

1) $\hat{A}f = f^{*}$

On a $\hat{A}(\alpha.f(x)+\beta.g(x)) \overset{?}{=} \alpha.\left(\hat{A}f(x)\right)+\beta.\left(\hat{A}.g(x)\right)$

$$\hat{A}(\alpha.f(x)+\beta.g(x)) = \hat{A}.(\alpha f(x))+\hat{A}.(\beta.g(x))$$
$$=(\alpha.f(x))^{*}+(\beta.g(x))^{*}=\alpha^{*}.f^{*}(x)+\beta^{*}.g^{*}(x)$$
$$=\alpha.\left(\hat{A}f(x)\right)+\beta.\left(\hat{A}.g(x)\right) \Rightarrow \hat{A}\text{ opérateur linéaire et}(\alpha^{*}=\alpha,\beta^{*}=\beta)\text{, car }(\alpha,\beta\text{ sont des constantes réelles})$$

2) $\hat{B}f = \dfrac{1}{f}$

On a $\hat{B}.(\alpha.f(x)+\beta.g(x)) \overset{?}{=} \alpha.\left(\hat{B}.f(x)\right)+\beta.\left(\hat{B}.g(x)\right)$

$$\hat{B}.(\alpha.f(x)+\beta.g(x)) = \hat{B}.(\alpha f(x))+\hat{B}.(\beta.g(x))$$
$$=\left(\frac{1}{\alpha.f(x)}\right)+\left(\frac{1}{\beta.g(x)}\right)=\left(\frac{1}{\alpha}.\frac{1}{f(x)}\right)+\left(\frac{1}{\beta}.\frac{1}{g(x)}\right)$$
$$=\frac{1}{\alpha}.\left(\hat{B}.f(x)\right)+\frac{1}{\beta}.\left(\hat{B}.g(x)\right)\neq\alpha.\left(\hat{B}.f(x)\right)+\beta.\left(\hat{B}.g(x)\right)\Rightarrow\hat{B}\text{ opérateur non linéaire}$$

3) $\hat{C}f = f^{2}$

On a $\hat{C}.(\alpha.f(x)+\beta.g(x)) \overset{?}{=} \alpha.\left(\hat{C}.f(x)\right)+\beta.\left(\hat{C}.g(x)\right)$

$$\hat{C}.(\alpha.f(x)+\beta.g(x)) = \hat{C}.(\alpha f(x))+\hat{C}.(\beta.g(x))$$
$$=(\alpha.f(x))^{2}+(\beta.g(x))^{2}=\alpha^{2}.f(x)^{2}+\beta^{2}.g(x)^{2}$$
$$=\alpha^{2}.\left(\hat{C}.f(x)\right)+\beta^{2}.\left(\hat{C}.g(x)\right)\neq\alpha.\left(\hat{C}.f(x)\right)+\beta.\left(\hat{C}.g(x)\right)\Rightarrow\hat{C}\text{ opérateur non linéaire}$$

4) $\hat{D}f = \frac{df}{dx}$

On a $\hat{D}.(\alpha.f(x)+\beta.g(x)) \overset{?}{=} \alpha.\left(\hat{D}.f(x)\right)+\beta.\left(\hat{D}.g(x)\right)$

$$\hat{D}.(\alpha.f(x)+\beta.g(x)) = \hat{D}.(\alpha f(x)) + \hat{D}.(\beta.g(x))$$
$$= \frac{d}{dx}(\alpha.f(x)) + \frac{d}{dx}(\beta.g(x)) = \alpha.\frac{d}{dx}f(x) + \beta\frac{d}{dx}.g(x)$$
$$= \alpha.(\hat{D}.f(x)) + \beta.(\hat{D}.g(x)) \Rightarrow \hat{D} \text{ opérateur linéaire}$$

5) $\hat{G}f = \int f dv$

On a $\hat{G}.(\alpha.f(x)+\beta.g(x)) \overset{?}{=} \alpha.(\hat{G}.f(x)) + \beta.(\hat{G}.g(x))$

$$\hat{G}.(\alpha.f(x)+\beta.g(x)) = \hat{G}.(\alpha f(x)) + \hat{G}.(\beta.g(x))$$
$$= \int \alpha.f(x).dx + \int \beta.g(x).dx = \alpha.\int f(x).dx + \beta.\int g(x).dx$$
$$= \alpha.(\hat{G}.f(x)) + \beta.(\hat{G}.g(x)) \Rightarrow \hat{G} \text{ opérateur linéaire}$$

Exercice 2 :

Les opérateurs $\hat{T}a$ (translation de a) et $\hat{P}$ (parité) tel que : $\hat{T}_a f(x) = f(x+a)$, $\hat{P}f(x) = f(-x)$, je démontre :

1) $\hat{T}_a\hat{P}\hat{T}_a = \hat{P}$

$$\hat{T}_a\hat{P}\hat{T}_a\, f(x) = \hat{T}_a\hat{P}f(x+a) = \hat{T}_a.f(-x-a) = f(-x-a+a) = f(-x) = \hat{P}f(x)$$
$$\hat{T}_a\hat{P}\hat{T}_a\, f(x) = \hat{P}f(x) \Rightarrow \hat{T}_a\hat{P}\hat{T}_a = \hat{P}$$

2) $\hat{T}_a\hat{P}\hat{T}_a{}^2\hat{P}\hat{T}_a = \hat{I}$

$$\hat{T}_a\hat{P}\hat{T}_a{}^2\hat{P}\hat{T}_a = (\hat{T}_a\hat{P}\hat{T}_a).(\hat{T}_a\hat{P}\hat{T}_a) = \hat{P}^2$$
$$\hat{P}^2 f(x) = \hat{P}f(-x) = f(x) = \hat{I}f(x) \Rightarrow \hat{P}^2 = \hat{I}$$
$$\Rightarrow \hat{T}_a\hat{P}\hat{T}_a{}^2\hat{P}\hat{T}_a = \hat{I}$$

3) $(\hat{I}+\hat{P})^2 = 2(\hat{I}+\hat{P})$

$$(\hat{I}+\hat{P})^2 = \hat{I}^2 + \hat{P}^2 + 2.\hat{I}.\hat{P}$$
$$\hat{I}^2 = \hat{I}, \hat{P}^2 = \hat{I} \text{ et } 2.\hat{I}.\hat{P} = 2.\hat{P}$$
$$\Rightarrow (\hat{I}+\hat{P})^2 = \hat{I}^2 + \hat{P}^2 + 2.\hat{I}.\hat{P} = \hat{I}+\hat{I} + 2.\hat{P} = 2(\hat{I}+\hat{P})$$
$$\Rightarrow (\hat{I}+\hat{P})^2 = 2(\hat{I}+\hat{P})$$

4) $[\hat{T}_a , \hat{P}] = \hat{P}(\hat{T}_a^{-1} - \hat{T}_a)$.

$$[\hat{T}_a , \hat{P}] = \hat{T}_a.\hat{P} - \hat{P}.\hat{T}_a$$

A partir de la question 1, on a : $\hat{T}_a\hat{P}\hat{T}_a = \hat{P} \Rightarrow \hat{T}_a.\hat{P} = \dfrac{\hat{P}}{\hat{T}_a} = \hat{P}.\hat{T}_a^{-1}$

$$\Rightarrow [\hat{T}_a , \hat{P}] = \hat{P}.\hat{T}_a^{-1} - \hat{P}.\hat{T}_a = \hat{P}(\hat{T}_a^{-1} - \hat{T}_a)$$

Exercice 3 :

1. Soient A, B et C trois opérateurs linéaires, je vérifie les relations suivantes :

1) $[\hat{A},\hat{B}+\hat{C}]=[\hat{A},\hat{B}]+[\hat{A},\hat{C}]$

$$[\hat{A},\hat{B}+\hat{C}]=\hat{A}.\left(\hat{B}+\hat{C}\right)-\left(\hat{B}+\hat{C}\right).\hat{A}=\hat{A}.\hat{B}+\hat{A}.\hat{C}.-\hat{B}.\hat{A}-\hat{C}.\hat{A}$$
$$[\hat{A},\hat{B}+\hat{C}]=\hat{A}.\hat{B}-\hat{B}.\hat{A}+\hat{A}.\hat{C}-\hat{C}.\hat{A}=[\hat{A},\hat{B}]+[\hat{A},\hat{C}]$$

2) $[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}+\hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$

$$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=\hat{A}.\hat{B}.\hat{C}-\hat{B}.\hat{C}.\hat{A}+\hat{B}.\hat{A}.\hat{C}-\hat{B}.\hat{A}.\hat{C}$$
$$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=\hat{A}.\hat{B}.\hat{C}-\hat{B}.\hat{A}.\hat{C}+\hat{B}.\hat{A}.\hat{C}-\hat{B}.\hat{C}.\hat{A}=\left(\hat{A}.\hat{B}-\hat{B}.\hat{A}\right).\hat{C}+\hat{B}.\left(\hat{A}.\hat{C}-\hat{C}.\hat{A}\right)=[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}+\hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$$
$$\Rightarrow [\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}+\hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$$

2. Soient les opérateurs $\hat{A}$, $\hat{B}$ obéissent la relation de commutation suivante : $[\hat{A},\hat{B}]=1$, je démontre :

$\hat{A}\hat{B}^2=\hat{B}^2\hat{A}+2\hat{B}$, en déduire $[\hat{A},\hat{B}^n]$.

On a :
$$\hat{A}\hat{B}^2=\hat{B}^2\hat{A}+2\hat{B}\Rightarrow\hat{A}\hat{B}^2-\hat{B}^2\hat{A}=[\hat{A},\hat{B}^2]=2\hat{B}$$
$$\text{et on a} : [\hat{A},\hat{B}^2]=[\hat{A},\hat{B}].\hat{B}+\hat{B}[\hat{A},\hat{B}]$$
$$\Rightarrow [\hat{A},\hat{B}].\hat{B}+\hat{B}[\hat{A},\hat{B}]=2\hat{B}\Rightarrow 1.\hat{B}+\hat{B}.1=2\hat{B}$$
$$\Rightarrow \hat{A}\hat{B}^2-\hat{B}^2\hat{A}=2\hat{B}$$

Je déduire : $[\hat{A},\hat{B}^n]$

Pour $n=1\Rightarrow [\hat{A},\hat{B}]=1$

Pour $n=2\Rightarrow [\hat{A},\hat{B}^2]=2.\hat{B}$

Pour $n=3\Rightarrow [\hat{A},\hat{B}^3]=[\hat{A},\hat{B}^2].\hat{B}+\hat{B}^2[\hat{A},\hat{B}]=2.\hat{B}.\hat{B}+\hat{B}^2 1=3.\hat{B}^2$

....

......

Pour n $\Rightarrow [\hat{A},\hat{B}^n]=n.\hat{B}^{n-1}$

4. Démontrer la relation suivante grâce à la condition d'adjonction :

   Définition de la relation d'adjonction : $(\hat{A}_1\hat{B}_1+\hat{A}_2\hat{B}_2)^+=(\hat{B}_1^+\hat{A}_1^++\hat{B}_2^+\hat{A}_2^+)$

$$\int_E \Phi^* . \left[(\hat{A}_1 \hat{B}_1 + \hat{A}_2 \hat{B}_2) . \Psi \right] dv = \int_E \left[(\hat{A}_1 \hat{B}_1 + \hat{A}_2 \hat{B}_2)^+ . \Phi^* \right] \Psi\Psi . d$$

D'autre part, en développant :

$$\int_E \Phi^* . \left[(\hat{A}_1 \hat{B}_1 + \hat{A}_2 \hat{B}_2) . \Psi \right] dv = \int_E \Phi^* . \left[(\hat{A}_1 \hat{B}_1) . \Psi \right] dv + \int_E \Phi^* . \left[(\hat{A}_2 \hat{B}_2) . \Psi \right] dv$$

$$= \int_E \Phi^* . \left[\hat{A}_1 . (\hat{B}_1 . \Psi\Psi \right] dv + \int_E \Phi^* . \left[\hat{A}_2 . (\hat{B}_2 . \Psi\Psi \right] dv = \int_E \left[\left(\hat{A}_1^+ . \Phi \right)^* \right] . (\hat{B}_1 . \Psi\Psi) . d + \int_E \left[\left(\hat{A}_2^+ . \Phi \right)^* \right] . (\hat{B}_2 . \Psi\Psi) . d$$

$$= \int_E \left[\left(\hat{B}_1 .^+ \hat{A}_1^+ . \Phi \right)^* \right] . \Psi\Psi . d + \int_E \left[\left(\hat{B}_2 {}^+ . \hat{A}_2^+ . \Phi \right)^* \right] . \Psi\Psi . d = \int_E \left[\left(\hat{B}_1 .^+ \hat{A}_1^+ + \hat{B}_2 {}^+ . \hat{A}_2^+) . \Phi \right)^* \right] . \Psi\Psi . d$$

en comparant, on aura donc :

$$\int_E \left[(\hat{A}_1 \hat{B}_1 + \hat{A}_2 \hat{B}_2)^+ . \Phi^* \right] \Psi\Psi . d = \int_E \left[\left(\hat{B}_1 .^+ \hat{A}_1^+ + \hat{B}_2 {}^+ . \hat{A}_2^+) . \Phi \right)^* \right] . \Psi\Psi . d$$

et en identifiant, il vient :

$$(\hat{A}_1 \hat{B}_1 + \hat{A}_2 \hat{B}_2)^+ = (\hat{B}_1^+ \ \hat{A}_1^+ + \hat{B}_2^+ \ \hat{A}_2^+)$$

__Exercice 4 :__

Soit l'opérateur Pk = $-i\hbar \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ avec **k=1,2,3**.

- Je calcule le commutateur $[\hat{P}_k , \hat{x}_k]$.

$$[\hat{P}_k , \hat{x}_k] f(x_k) = \hat{P}_k , \hat{x}_k \ f(x_k) - \hat{x}_k . \hat{P}_k \ f(x_k)$$

$$\hat{P}_k . \hat{x}_k \ f(x_k) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\hat{x}_k \ f(x_k) \right) = -i\hbar . \left(f(x_k) + \hat{x}_k . \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k} \right)$$

$$\hat{x}_k . \hat{P}_k \ f(x_k) = -i\hbar . \left(\hat{x}_k . \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k} \right)$$

$$\Rightarrow \hat{P}_k , \hat{x}_k \ f(x_k) - \hat{x}_k . \hat{P}_k \ f(x_k) = -i\hbar . \left(f(x_k) + \hat{x}_k . \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k} \right) + i\hbar . \left(\hat{x}_k . \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k} \right) = -i\hbar . f(x_k)$$

$$\Rightarrow [\hat{P}_k , \hat{x}_k] = -i\hbar = \frac{\hbar}{i}$$

- Calculer le commutateur $[\hat{P}_k , \hat{x}_j]$.

$$[\hat{P}_k, \hat{x}_j\ ]f(x) = \hat{P}_k, \hat{x}_j\ f(x) - \hat{x}_j.\hat{P}_k\ f(x)$$

$$\hat{P}_k, \hat{x}_j\ f(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\hat{x}_j\ f(x)\right)$$

$$\hat{x}_j.\hat{P}_k\ f(x) = -i\hbar.\left(\hat{x}_j.\frac{\partial}{\partial x_k}\left(f(x)\right)\right)$$

$$\Rightarrow \hat{P}_k, \hat{x}_j\ f(x) - \hat{x}_j.\hat{P}_k\ f(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\hat{x}_j\ f(x)\right) + i\hbar.\left(\hat{x}_j.\frac{\partial}{\partial x_k}\left(f(x)\right)\right)$$

$$\Rightarrow [\hat{P}_k, \hat{x}_k\ ] = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x_k}.\hat{x}_j - \hat{x}_j.\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = -i\hbar\delta_{kj}$$

δ_{kj} : indice de Kroneker

$$\delta_{kj} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{lorsque } k = j; \text{on a} : \delta_{jj} = 1 \\ \text{lorsque } k \neq j; \text{on a} : \delta_{ii} = 0. \end{cases}$$

<u>Exercice 5 :</u>

On définit un produit scalaire : $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx$

1. Je calcule l'opérateur adjoint de l'opérateur **x** :

$$\langle f(x) | x\ g(x) \rangle = \langle x^+ f(x) | g(x) \rangle$$

L'opérateur adjoint $\boldsymbol{x^+}$ de l'opérateur ***x*** est donc égale à ***x*.**

Soit $\mathbf{x^+ = x}$, l'opérateur **x est** hermitien

2. Je calculer l'opérateur adjoint de **d/dx**.

On applique la relation : $\int f^*(x).\left(\hat{A}.g(x)\right).dx \overset{?}{=} \int \left(\hat{A}^+ . f(x)\right)^* g(x) dx$

Intégrons par parties : $\int u^{/} \upsilon . dx = [u.\upsilon] - \int u \upsilon^{/} . dx$

Posons : $u^{/} = \frac{d}{dx}\left(g(x)\right)$ et $\upsilon = f^*(x)$

Donc : $u = g(x)$ et $\upsilon^{/} = \frac{d}{dx}\left(f^*(x)\right)$

$$I = \int f^*(x).\left(\hat{A}.g(x)\right)dx = \int f^*(x).\left(\frac{d}{dx}.g(x)\right).dx$$

$$= \left[f^*(x).g(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int \frac{d}{dx}\left(f(x)\right)^* g(x)dx$$

L'intégrale qui donne le produit scalaire $\langle f(x) | g(x) \rangle$ étant convergente,

$\left[f^*(x).g(x)\right]_{-\infty}^{+\infty}$, tend vers zéro quand $x \to \pm\infty$, le terme intégré est donc nul, et :

$$I = -\int \frac{d}{dx}\left(f(x)\right)^* g(x)dx = \int \left(-\frac{d}{dx} f(x)\right)^* g(x)dx = \int \left(\hat{A}^+ f(x)\right)^* g(x)dx$$

$$\Rightarrow \hat{A}^+ = -\frac{d}{dx}$$

3. L'opérateur **id/dx** est-il hermitien ?

$$\left(\frac{id}{dx}\right)^+ = (i)^+.\left(\frac{d}{dx}\right)^+ = (-i)\left(-\frac{d}{dx}\right) = \frac{id}{dx}$$

L'opérateur *id/dx* est hermitien

4. Montrer que l'opérateur **laplacien** est hermitien

$$\hat{\Delta}(x,y,z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

On pose : $\hat{\Delta} = \hat{A}^2 + \hat{B}^2 + \hat{C}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\hat{\Delta}^+ = \left(\hat{A}^2\right)^+ + \left(\hat{B}^2\right)^+ + \left(\hat{C}^2\right)^+$$

$$\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \hat{A}^+ = -\frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \left(\hat{A}^2\right)^+ = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

De la meme manière, on trouve

$$\hat{B} = \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow \hat{B}^+ = -\frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow \left(\hat{B}^2\right)^+ = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\hat{C} = \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow \hat{C}^+ = -\frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow \left(\hat{C}^2\right)^+ = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

finalement on trouve :

$$\hat{\Delta}^+ = \left(\hat{A}^2\right)^+ + \left(\hat{B}^2\right)^+ + \left(\hat{C}^2\right)^+ = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \hat{\Delta}$$

$\Rightarrow$ L'opérateur $\hat{\Delta}(x,y,z)$ est hermitien, car $\hat{\Delta}^+ = \hat{\Delta}$

<u>Exercice 6 :</u>

1- Soit un opérateur linéaire $\hat{A}$ ayant un vecteur propre ''$|\psi\rangle$'' et une valeur propre ''a''.

Soit un deuxième opérateur linéaire B tel que $[\hat{A},\hat{B}] = \hat{B} + 2\hat{B}\hat{A}^2$.

- Je montrer que ($\hat{B}\,|\psi\rangle$) est vecteur propre de l'opérateur $\hat{A}$ et je détermine sa valeur.

On a : $\hat{A}|\Psi\rangle = a.|\Psi\rangle$

on a : $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = \hat{B} + 2\hat{A}\hat{B}^2$

et on a $\left[\hat{A},\hat{B}\right]|\Psi\rangle = \left(\hat{A}.\hat{B}\right)|\Psi\rangle - \left(\hat{B}.\hat{A}\right)|\Psi\rangle = \left(\hat{B} + 2\hat{B}\hat{A}^2\right)|\Psi\rangle$

$\Rightarrow \left(\hat{A}.\hat{B}\right)|\Psi\rangle = \left(\hat{B}.\hat{A}\right)|\Psi\rangle + \left(\hat{B} + 2\hat{B}\hat{A}^2\right)|\Psi\rangle$

$\Rightarrow \left(\hat{A}.\hat{B}\right)|\Psi\rangle = \left(\hat{B}.\hat{A}|\Psi\rangle\right) + \left(\hat{B}|\Psi\rangle + 2\hat{B}\hat{A}^2|\Psi\rangle\right) = \hat{B}\left(\hat{A}|\Psi\rangle\right) + \left(\hat{B}|\Psi\rangle + 2\hat{B}.\hat{A}\hat{A}|\Psi\rangle\right)$

$\Rightarrow \hat{A}\left(\hat{B}|\Psi\rangle\right) = \hat{B}\left(a.|\Psi\rangle\right) + \left(\hat{B}|\Psi\rangle + 2\hat{B}.\hat{A}.a.|\Psi\rangle\right) = (a.+1)\left(\hat{B}|\Psi\rangle\right) + \left(2a.\hat{B}.\hat{A}|\Psi\rangle\right)$

$\Rightarrow \hat{A}\left(\hat{B}|\Psi\rangle\right) = (a.+1)\left(\hat{B}|\Psi\rangle\right) + \left(2a.\hat{B}.a|\Psi\rangle\right) = (a.+1)\left(\hat{B}|\Psi\rangle\right) + \left(2a^2.\hat{B}.|\Psi\rangle\right)$

$\Rightarrow \hat{A}\left(\hat{B}|\Psi\rangle\right) = \left(2a^2 + a.+1\right)\left(\hat{B}|\Psi\rangle\right) = a'\left(\hat{B}|\Psi\rangle\right)$

$d'où : a' = \left(2a^2 + a.+1\right),$

$\left(\hat{B}|\Psi\rangle\right)$ est un vecteur propre de l'opérateur $\hat{A}$, avec la valeur propre $\left(2a^2 + a.+1\right),$

2- Soient $\hat{A}$, $\hat{B}$ **et** $\hat{C}$ trois opérateurs. Exprimer le commutateur du produit $\hat{A}\,.\,\hat{B}$ et $\hat{C}$ en fonction des commutateurs $[\hat{A},\hat{C}]$ et $[\hat{B},\hat{C}]$

$\left[\hat{A}.\hat{B},\hat{C}\right] = \hat{A}.\hat{B}.\hat{C}\text{-}\hat{C}.\hat{A}\hat{B} + \hat{A}.\hat{C}..\hat{B} - \hat{A}.\hat{C}..\hat{B} = \hat{A}\left(\hat{B}.\hat{C} - \hat{C}..\hat{B}\right)\text{-}\left(\hat{A}.\hat{C} - \hat{A}.\hat{C}\right)\hat{B}$

$\left[\hat{A}.\hat{B},\hat{C}\right] = \hat{A}\left(\hat{B}.\hat{C} - \hat{C}..\hat{B}\right)\text{-}\left(\hat{A}.\hat{C} - \hat{A}.\hat{C}\right)\hat{B} = \hat{A}.\left[\hat{B},\hat{C}\right] + \left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B}$

$\Rightarrow \left[\hat{A}.\hat{B},\hat{C}\right] = \hat{A}.\left[\hat{B},\hat{C}\right] + \left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B}$

<u>Exercice 7 :</u>

Soit la matrice $\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1- & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

1. le format de $\hat{A}$ *est :* (3×3)
2. la valeur de chacun des éléments a_{14}, a_{23}, a_{33} et a_{32} *:*

   a_{14} = pas existé, $a_{23}=1$, $a_{33}=3$ et $a_{32}=-1$
3. La matrice $\hat{A}$ est inversible, il faut $dét(A) \neq 0$

   $dét(A) = (-6+1) - 0 - 3(-2-0) = -5+6 = 1 \neq 0$, donc $\hat{A}$ est inversible.
4. Détermination l'inverse de $\hat{A}$

On a : $A^{-1} = \frac{A^{+t}}{|A|}, avec :\ |A| \neq 0$

$$A^{+} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}$$

Par exemple :

$$a'_{32} = -\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -(1+6) = -7; \quad a'_{12} = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = -(6-0) = -6$$

$$\Rightarrow A^{+} = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \\ -6 & -7 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{+t} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -6 \\ -6 & 3 & -7 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{A^{+t}}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -5 & 3 & -6 \\ -6 & 3 & -7 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -6 \\ -6 & 3 & -7 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } A^{-1}.A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5) Déterminer les valeurs propres de la matrice

5. Soit la matrice : $\hat{B} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

- Les valeurs propres de $\hat{A}$ sont les scalaires vérifiant :

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(5-\lambda)(4+\lambda) + 18$$
$$= \lambda^2 - \lambda - 2$$
$$= (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

d'où les valeurs propres : $\boldsymbol{\lambda_1 = -1}$ **et** $\boldsymbol{\lambda_2 = 2}$

- les vecteurs propres associés :

En posant X_1 et X_2 les vecteurs propres associés respectivement à $\boldsymbol{\lambda_1 = -1}$ et $\boldsymbol{\lambda_2 = 2}$, nous avons :

- Pour : $\boldsymbol{\lambda_1 = -1}$

$$(A+I_2)X_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x''_1 \end{pmatrix} = 0$$

Le système est équivalent à : $6x' - 3x'' = 0$

Choix d'un vecteur propre : $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Pour : $\lambda_2 = 2$

$$(A-2I_2)X_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_2 \\ x''_2 \end{pmatrix} = 0$$

Le système est équivalent à : $3x' - 3x'' = 0$

Choix d'un vecteur propre :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, la famille (X_1, X_2) est une base de R^2.

<u>Exercice 8 :</u>

Ecrire la matrice représentative de l'opérateur $\widehat{A} = \dfrac{d}{dx}$, sur la base des fonctions e^{inwx}, **w=2π/T.**

n: nombre entier compris entre -2 et +2.

La matrice sera de dimension (5×5)

- Si $m \neq n$:

$$A_{mn} = \frac{\left\langle e^{inwx} \middle| \dfrac{d}{dx} \middle| e^{imwx} \right\rangle}{\left\langle e^{inwx} \middle| e^{imwx} \right\rangle} = \frac{imw\int_0^T e^{i(n-m)wx}.dx}{T} = 0$$

- *Si m=n :*

$$A_{mn} = \frac{inw}{T}\int_0^T dx = inw$$

D'où la matrice :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)=\begin{pmatrix} -2iw & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{-iw} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{iw} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{2iw} \end{pmatrix}$$

La matrice est diagonale, ce qui est normale, car construite sur la base de ces fonctions propres. Les éléments diagonaux, valeurs propres de l'opérateur sont imaginaires.

Il suffit de les multiplier par i pour obtenir des nombres réels et de constater que l'opérateur est un opérateur hermitique (valeurs propres réelles et fonctions propres orthogonales).