جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة و علوم الطبيعة الحياة
قسم علوم المادة

2020 - 2019
مقياس :الميكانيك الكوانتي

السلسلة الثالثة

التمرين 1

A. برهن من اجل مؤثر خطي ما ، ان المؤثرات التالية ارميتية :

ا)- AA^+ ب)- $A + A^+$ ج)- $i(A \pm A)$ د)- A^+A

B. يحقق المؤثران A و B علاقة التبادل التالية $[A,B] = 1$

احسب . $AB^2 - B^2A$

C. فك الأقواس في العبارات التالية :

ا)- $(x+\frac{d}{dx})^2$ و $\left((x-\frac{d}{dx})\right)\left((x+\frac{d}{dx})\right)$ و $\left((x+\frac{d}{dx})\right)\left((x-\frac{d}{dx})\right)$

ب)- $\left(x\frac{d}{dx}\right)^2$ و $\left(\frac{d}{dx}x\right)^2$ و $\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x}\right)^3$

التمرين 2

وجد المؤثرين المرافقين ارمتيا للمؤثرين التاليين $\frac{d^n}{dx^n}$ و $\frac{d}{dx}$

التمرين3

اذا كان T_a و P مؤثري الإنزياح بمسافة a و الإنعكاس ، اي :

$T_a\,\psi(x)=\psi(x+a)$ $p\psi(x) = \psi(-x)$

فبرهن ان:

ا)- $T_aPT_a = P$ ب) $T_aPT_a^2PT_a = I$ ج) $(I+P)^2 = 2(I+P)$.

التمرين 4

عبر عن المبدل $[A,B^n]$ كتابع للمبدل $[A,B]$.

احسب المبدلات التالية

أ) $\left[x, \frac{d}{dx}\right]$ ب) $\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}, f(r,\theta,\varphi)\right]$ ج) $\left[x, \frac{\partial}{\partial x}F(x)\frac{\partial}{\partial x}\right]$

التمرين 5

لناخذ المؤثر $S = e^{i\lambda P/\hbar}$ حيث λ عدد حقيقي اما P فمؤثر الإندفاع وهو يعطي في التمثيل الإحداثي بالشكل $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$، ويحقق مؤثر الإحداثية X و الإندفاع P علاقة التبادل

أ)- برهن ان P مؤثر ارميتي

ب)- برهن ان S مؤثر احادي وان $S^+(\lambda,P)=S^{-1}(\lambda,P)=S(-\lambda,P)$.

ج)-احسب المبدل $[X , S]$.

التمرين 6

أوجد القيم الذاتية و التوابع الذاتية للمؤثرا

أ)- $\frac{d}{dx}$ ب)- $i\frac{d}{dx}$ ج)- $\sin\varphi \frac{d}{d\varphi}$

التمرين 7

يمثل مؤثر A في اساس متعامد مقنن $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ بالشكل : $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$

ما الشروط التي ينبغي ان تحققها عناصر هذه المصفوفة كي يكون المؤثر A ارميتيا

نفرض في حالة خاصة ان المؤثر A يعطي بالمصفوفة التالية : $A=\begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$

تأكد من ان هذه المصفوفة ارميتية واحسب المصفوفة المعاكسة لها

هل هذه المصفوفة احادية

أوجد القيم الذاتية و الأشعة الذاتية المقننة للمؤثر

التمرين 8

نعرف في فضاء شعاعي ذي بعدين قاعدته $\{\}$ المؤثر σ_y والذي تمثله في هذا الفضاء المصفوفة :

$$\sigma_y=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

1)- هل يمثل σ_y مقدار فيزيائيا مقاسا

2)- عين قيمة و اشعة الذاتية

3)- تحقق من تعامد هذه الأشعة

السلسلة 3

التمرين 1

A)

$\cdot\ (AA^+)^+ = (A^+)^+ A^+ = AA^+$

$\cdot\ (A + A^+)^+ = A^+ + (A^+)^+ = A^+ + A = A + A^+.$

$\cdot\ [i(A^+ - A)]^+ = -i(A^+ - A)^+ = -i(A - A^+).$

$= i(A^+ - A).$

$(A^+A)^+ = A^+(A^+)^+ = A^+A.$

B) علاقة التبادل $[A,B]=1$.

صار $AB^2 - B^2A$.

$AB^2 - B^2A = ABB - BBA + BAB - BAB$

$= ABB - BAB + BAB - BBA = \cancel{[A,B]}^{1}B + B\cancel{[A,B]}^{1} = 2B.$

C) فك الأقواس:

$$\left(x + \frac{d}{dx}\right)^2 = x^2 + x\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}x + \frac{d^2}{dx^2}$$

$$\left(x + \frac{d}{dx}\right)^2 f = \left[x^2 + x\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}x + \frac{d^2}{dx^2}\right] f$$

$$= x^2 f + x\frac{d}{dx}f + \frac{d}{dx}\cdot x\cdot f + \frac{d^2}{dx^2}f$$

$$= x^2 + x\frac{d}{dx} + \left(f + x\frac{d}{dx}\cdot f\right) + \frac{d^2}{dx^2}$$

$$= x^2 + 2x\frac{d}{dx} + 1 + \frac{d^2}{dx^2}.$$

$$\left[\left(x-\frac{d}{dx}\right)\left(x+\frac{d}{dx}\right)\right]f =$$

$$= x^2 f + x\frac{d}{dx}f - \frac{d}{dx}xf - \frac{d^2}{dx^2}f$$

$$= x^2 + \cancel{x\frac{d}{dx}} - f\frac{dx}{dx} - \cancel{x\frac{d}{dx}}f - \frac{d^2}{dx^2}$$

$$= x^2 + f\frac{dx}{dx} - \frac{d^2}{dx^2} = x^2 - 1 - \frac{d^2}{dx^2}.$$

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^2 f = \left(x\frac{d}{dx}\right)\left(x\frac{d}{dx}\right)f.$$

$$= x\underbrace{\frac{dx}{dx}}_{=1}\cdot\frac{d}{dx} + x^2\frac{d^2}{dx^2}.$$

$$= x\frac{d}{dx} + x^2\frac{d^2}{dx^2}.$$

$$\left(\frac{d}{dx}x\right)^2$$ نتبع الطريقة نفسها.

نجد: $1+3x\frac{d}{dx}+x^2\frac{d^2}{dx^2}$

$$\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x}\right)^3 = \left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x}\right)^2.$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x}\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x}\right)^2.$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d}{dx}\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}+\frac{1}{x^2}\right) +$$

$$\frac{1}{x}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d}{dx}\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}+\frac{1}{x^2}\right).$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}-\cancel{\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}+\cancel{\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$+\frac{1}{x}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}-\cancel{\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}+\cancel{\frac{1}{x^2}}\right).$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{d}{dx}\right)+\frac{1}{x}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2d}{x\,dx}\right)$$

$$= \frac{d^3}{dx^3}+\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x}\frac{d}{dx}\right)+\frac{1}{x}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2}{x^2}\frac{d}{dx}$$

$$= \frac{d^3}{dx^3}+2\left[\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{x}+\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{d}{dx}}\right]+\frac{1}{x}\frac{d^2}{dx^2}+\cancel{\frac{2}{x^2}\frac{d}{dx}}$$

$$= \frac{d^3}{dx^3}+2\frac{1}{x}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d^2}{dx^2}.$$

$$= \frac{d^3}{dx^3}+\frac{3}{x}\frac{d^2}{dx^2}.$$

التمرين 02

إيجاد المؤثرين المرافقين: لدينا

$$\langle\phi|\left(\frac{d}{dx}\right)^{+}|\psi\rangle = \langle\frac{d}{dx}\phi|\psi\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d}{dx}\phi\right)^{*}\cdot\psi\,dx.$$

نستعمل التكامل بالتجزئة

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v'u = vu - \int vu'.$$

$$= \overbrace{\phi^{*}\cdot\psi\Big|_{-\infty}^{+\infty}}^{0} - \int_{-\infty}^{+\infty}\phi^{*}\frac{d\psi}{dx}\,dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^{*}\frac{d\psi}{dx}\,dx = -\langle\phi|\frac{d\psi}{dx}\rangle$$

$$\langle \phi | \left(\frac{d}{dx}\right)^{+} | \psi \rangle = - \langle \phi | \frac{d}{dx} | \psi \rangle$$

نجد بإسقاط الشعاعين $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$

من طرفي هذه المساواة:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{+} = - \frac{d}{dx} .$$

لقد افترضنا أن:

$\int |\psi(x)|^2 dx$, $\int |\phi(x)|^2 dx$

محدودان وبالتالي يؤول كل من ϕ و ψ إلى

الصفر عند $x \to \pm\infty$ أي: $\phi^* \psi \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$

بنفس الطريقة:

$$\left(\frac{d^n}{dx^n}\right)^{+} = (-1)^n \cdot \frac{d^n}{dx^n} .$$

<u>التمرين 03</u>.

لدينا:

$$\begin{cases} T_a \psi(x) = \psi(x+a) & \text{الإنسحاب} \\ P\psi(x) = \psi(-x) & \text{الإنعكاس} \end{cases}$$

$$T_a P T_a \psi(x) = T_a P \psi(x+a)$$

$$= T_a \psi(-x-a) .$$

$$= \psi(-x-a+a) = \psi(-x)$$

$$= P . \psi(x)$$

أي:

$$T_a P T_a = P .$$

$$T_a P T_a^2 P T_a \psi(x)$$

$$= T_a P T_a^2 P \psi(x+a)$$

$$= T_a P T_a^2 \psi(-x-a)$$

$$= T_a P T_a \cdot T_a \psi(-x-a)$$

$$= T_a P T_a \cdot \psi(-x-a+a)$$

$$= T_a P T_a \cdot \psi(-x) = T_a P T_a P \psi(x)$$

$$= T_a P \psi(-x+a)$$

$$= T_a \psi(x-a) .$$

$$= \psi(x-a+a) . = 1 \psi(x)$$

$$\Rightarrow T_a P T_a^2 P T_a = 1$$

بنفس الطريقة نجد:

$$(I+P)^2 = 2(I+P) .$$

<u>التمرين 04</u>

تعبير:

$$[A,B^n] = [A, B B^{n-1}]$$

$$= [A,B] B^{n-1} + B [A, B^{n-1}] .$$

$$= [A,B] B^{n-1} + B [A, B B^{n-2}] .$$

$$= [A,B] B^{n-1} + B [A,B] B^{n-2} + B^2 [A, B^{n-2}]$$

$$= [A,B] B^{n-1} + B^2 [A, B^{n-2}] + B [A,B] B^{n-2} .$$

بنفس الطريقة نجد:

$$[A,B^n]=[A,B]B^{n-1}+B[A,B]B^{n-2}+B^2[A,B]B^{n-2}$$
$$+B^3[A,B^{n-3}]+\dots+B^{n-2}[A,B]B$$
$$+B^{n-1}[A,B].$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}B^k[A,B]B^{n-1-k}$$

حساب المبادلات.

$$\begin{cases}[x,\frac{d}{dx}].\\ P=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}=\frac{P}{-i\hbar}\end{cases}$$
$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}=\frac{iP}{\hbar}$$
$$[x,\frac{d}{dx}]=[x,\frac{iP}{\hbar}].$$
$$=\frac{i}{\hbar}[x,P].$$

II-b

$$[x,\frac{d}{dx}]\psi(x)=(x\frac{d}{dx}-\frac{d}{dx}x)\psi(x)$$
$$=\cancel{x\frac{d\psi(x)}{dx}}-\psi(x)-\cancel{x\frac{d\psi(x)}{dx}}$$
$$=-\psi(x)=-I\psi(x).$$

$$\cdot[\frac{\partial}{\partial\varphi},f(r,\theta,\varphi)]\psi(r,\theta,\varphi)=$$
$$(\frac{\partial}{\partial\varphi}f-f\frac{\partial}{\partial\varphi})\psi$$
$$=\frac{\partial}{\partial\varphi}f\cdot\psi-f\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$$
$$=\frac{\partial f}{\partial\varphi}\cdot\psi+\cancel{f\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}}-\cancel{f\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}}$$
$$=\frac{\partial f}{\partial\varphi}\cdot\psi.$$
$$\Rightarrow[\frac{\partial}{\partial\varphi}.f(r,\theta,\varphi)]=\frac{\partial f}{\partial\varphi}.$$

وبنفس الطريقة نجد:

$$[x,\frac{\partial}{\partial x}F(x)\frac{\partial}{\partial x}]=-\frac{\partial F}{\partial x}-2F\frac{\partial}{\partial x}.$$

<u>التمرين 05</u>

• إثبات أن P مؤثر هرميتي:

* من التمرين 2 ـ TD_{III}

نجد: $\boxed{(\frac{d}{dx})^+=-\frac{d}{dx}.}$

$$P^+=(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})^+=i\hbar(\frac{\partial}{\partial x})^+$$
$$=i\hbar(-\frac{d}{dx})=P.$$

أي أن P مؤثر هرميتي

• إثبات أن S مؤثر أحادي.

$$S^+(\lambda,P)=(e^{i\lambda P/\hbar})^+=e^{-i\frac{\lambda P}{\hbar}}$$
$$=S(-\lambda,P)\text{ — ①}$$

$$S^+(\lambda,P).S(\lambda,P)=I=S(\lambda,P).S^+(\lambda,P)$$

وعليه فالمؤثر S أحادي.

$s^+(\lambda,p) . S(\lambda,p) = I$

$$s^+(\lambda,p) . \underbrace{S(\lambda,p)\, S^{-1}(\lambda,p)}_{I} = I\, S^{-1}(\lambda,p)$$

$$\Rightarrow s^+(\lambda,p) = S^{-1}(\lambda,p) \quad (2)$$

ومنه : من (1) و(2) :

$$s^+(\lambda,p) = S^{-1}(\lambda,p) = S(-\lambda,p)$$

حساب التبديل $[x,S]$.

$$[x,S] = [x, S(\lambda,p)] = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} S(\lambda,p).$$

$$= i\hbar . i\frac{\lambda}{\hbar} S(\lambda,p)$$

$$= -\lambda S(\lambda,p)$$

التمرين 06 :

إيجاد القيم الذاتية والتوابع الذاتية :

$$\frac{d}{dx}\psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda(x) \Rightarrow \frac{d\psi_\lambda}{\psi_\lambda} = \lambda\, dx.$$

بالمكاملة :

$$\ln\frac{\psi_\lambda}{C} = \lambda x$$

ومنه :

$$\Rightarrow \psi_\lambda(x) = C e^{\lambda x}$$

نفترض محدودية ψ_λ عندما $x \to \pm\infty$

أي يكون λ مقدار تخيليا : $\lambda = i\alpha$.

$$\psi_\lambda(x) = C e^{i\alpha x}.$$

نقوم بتقنين :

$$\int \psi^*\psi\, dx = 1.$$

$$\int C e^{-i\alpha x} . C e^{i\alpha x}\, dx = 1$$

$$\int C^2 dx = 1.$$

$$\boxed{C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}$$

إذن :

$$\psi_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{i\alpha x}.$$

$$i\frac{d}{dx}\psi = \lambda\psi.$$

$$\Rightarrow i\frac{d\psi}{\psi} = \lambda\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{d\psi}{\psi} = -i\lambda\, dx$$

بالمكاملة نجد :

$$\psi_\lambda(x) = B e^{-i\lambda x}.$$

نفترض محدودية ψ عندما $x \to \pm\infty$

أي يكون λ مقدار حقيقيا .

- نحسب B من شرط التقنين

$$\int \psi^*\psi\, dx = 1.$$

$$B^2 = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\psi_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{-i\lambda x}.$$

التمرين 02

* الشروط التي ينبغي أن تحققها المصفوفة A أرميتية.

$A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- a و d حقيقيين.
- b و c مترافقيين.

* لدينا.

$A\begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

إثبات أن المصفوفة أرميتية.

$A^+ = \begin{pmatrix} -1 & i \\ +i & 1 \end{pmatrix}$, $A^+ = (\tilde{A})^*$

$= A$.

بما أن:

$D = (-1\times 1) - (-i \cdot i)$

$= -1 - 1 = -2 \neq 0$

إذن يقبل المصفوفة المعاكسة A^{-1}.

$A \cdot A^{-1} = I$.

نضع

$A^{-1}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha - i\gamma = 1 \\ -\beta - i\delta = 0 \\ i\alpha + \gamma = 0 \\ i\beta + \delta = 1. \end{cases}$

ومنه نجد:

$\alpha = -\frac{1}{2}$.

$\gamma = \frac{1}{2}i$

$\delta = \frac{1}{2}$

$\beta = -\frac{1}{2}i$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$A^{-1} = +A/2$.

• بما أن:

A أرميتية

ومعاكسها $A/2$.

$A^+ = A$.

فإن

$A^{-1} = A/2$

ومنه $A^+ \neq A^{-1}$

فالمصفوفة A ليست بالأحادية.

إيجاد القيم الذاتية والأشعة الذاتية:

$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -i \\ i & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(-1-\lambda)(1-\lambda) + i^2 = 0$

$-1 + \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda} + \lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda^2 = 2}$

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\lambda_1 = \sqrt{2}}$$

$$A\psi = \lambda\psi.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} -\alpha - i\beta = \alpha\sqrt{2}. \\ i\alpha + \beta = \beta\sqrt{2}. \end{cases} \Rightarrow \quad i\beta = -\alpha - \alpha\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow \beta = +i\alpha + i\alpha\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = i(1+\sqrt{2})\alpha}.$$

$$\psi_{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \alpha \\ i(1+\sqrt{2})\alpha \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ i(1+\sqrt{2}) \end{pmatrix}.$$ إذن

! إيجاد α

باستعمال شرط التنظيم :

$$\langle \psi_{\sqrt{2}} | \psi_{\sqrt{2}} \rangle = 1.$$

$$\begin{cases} \langle \psi_{\sqrt{2}} | = \alpha^* \begin{pmatrix} 1 & -i(1+\sqrt{2}) \end{pmatrix}. \\ | \psi_{\sqrt{2}} \rangle = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ i(1+\sqrt{2}) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

$$= \alpha^*\begin{pmatrix} 1 & -i(1+\sqrt{2}) \end{pmatrix} \cdot \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ i(1+\sqrt{2}) \end{pmatrix} = 1$$

$$= \alpha^2\left(1 + (1+\sqrt{2})^2\right) = 1$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(1+\sqrt{2})^2}}.$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow \psi_{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{4+2\sqrt{2}} \\ i(1+\sqrt{2}) \cdot 1/\sqrt{4+2\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 1 \\ i(1+\sqrt{2}) \end{pmatrix}.$$

$$\psi_{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\left(|e_1\rangle + i(1+\sqrt{2})|e_2\rangle\right).$$

بنفس الطريقة نجد من أجل :

$$\boxed{\lambda = -\sqrt{2}}.$$

$$\psi_{-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\left(|e_1\rangle + i(1-\sqrt{2})|e_2\rangle\right).$$

التمرين 08

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

مقدار فيزيائي مقاس

يجب أن يكون ارميتيا.

$$\sigma^+ = \sigma = (\tilde{\sigma})^*$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sigma$$

σ ارميتي، يمثل مقدارا مقاسا

عين قيمة وأشعة الذاتية

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & -i \\ i & 0-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 + i^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \pm 1}$$

$\boxed{\lambda = 1}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = +1\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} -i e_2 = e_1 \\ i e_1 = e_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{e_2 = i e_1}.$$

$$\psi_{+1}\begin{pmatrix} e_1 \\ i e_1 \end{pmatrix} = e_1\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

$$\langle \psi_{+1}^* | \psi_{+1} \rangle = 1.$$

$$e_1^* (1 \quad -i)\, e_1 (1 \quad i) = 1.$$

$$e_1^2 (1 + 1) = 1 \Rightarrow e_1^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\psi_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

$$\psi_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_1\rangle + i|e_2\rangle\right).$$

نتبع الطريقة عينها لـ $\boxed{\lambda = -1}$

• نتحقق أن الأشعة متعامدة

$$\langle \psi_{+1} | \psi_{-1} \rangle = 0.$$

$$\langle \psi_{+1} | = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad -i).$$

$$|\psi_{-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

إذن!

$$\langle \psi_{+1} | \psi_{-1} \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^* (1 \quad -i)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(1 - 1) = 0$$

فهما متعامدان