(٨)

الفصل (4)

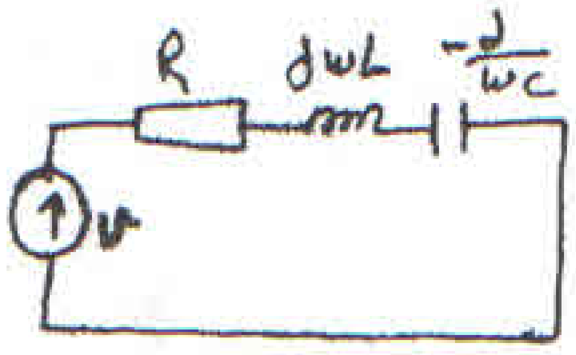
دارات الرنين الكهربائي

مقدمة

يقال لدارة تحتوي على ملف و مكثف و مقاومة بأنها دارة رنين نظراً لأنه عند تردد ما خاص تتعادل قيمة كل من الملف و المكثف تكون الجهد المؤثر و التيار الناتج في طور واحد وعلى ذلك فإن المعاوقة المكافئة للدارة تتكون من المقاومة R فقط كما أن فرق الجهد على كل من الملف و المكثف أكبر ما يمكن وهذا راجع لكون أن الدارة في حالة تجاوب أعظمي.

4-1 : دارة رنين على التوالي :

4-1-أ : معاوقة الدارة RLC



الشكل (5-1)

لتكن الدارة RLC الموضحة في الشكل (5-1) حيث تعطى معاوقتها كما يلي:

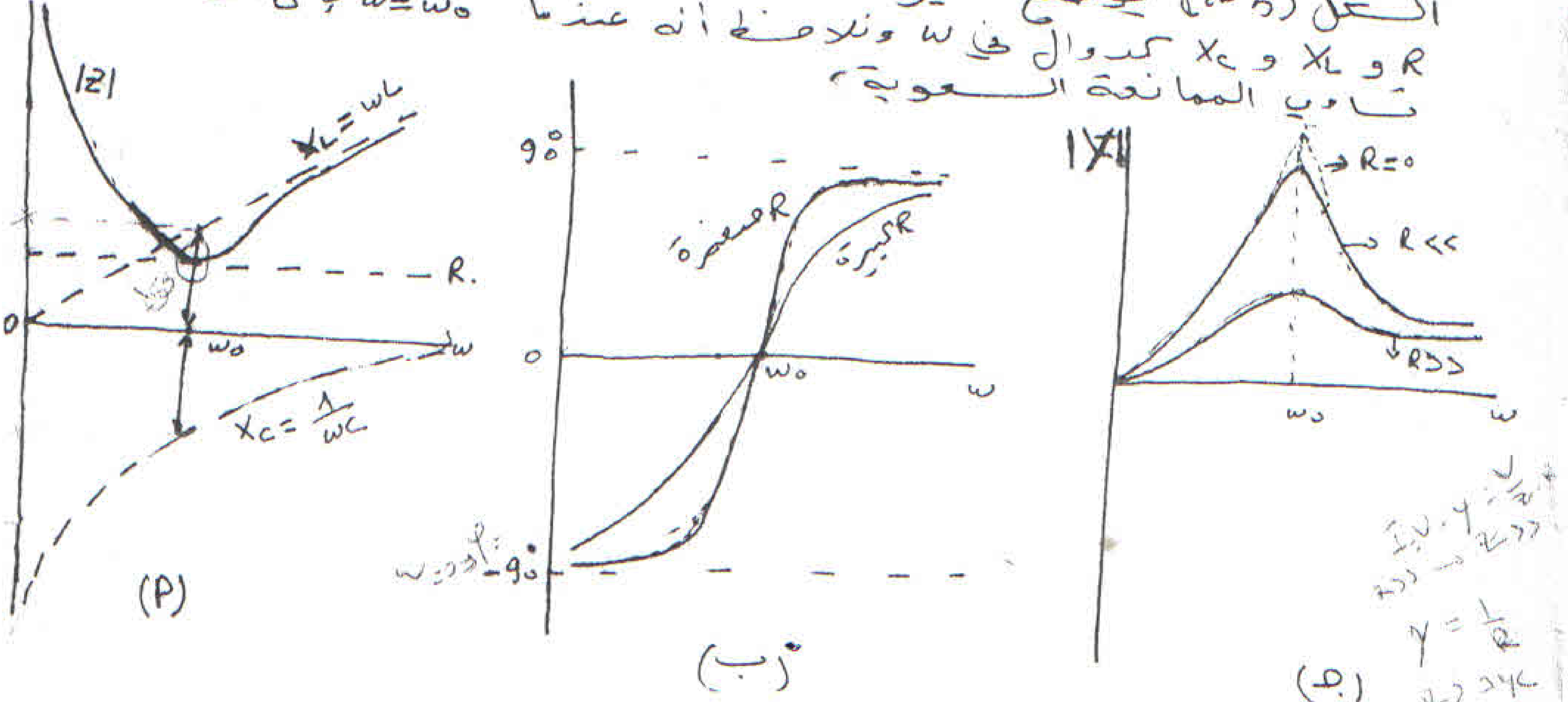
$$Z = R + jX = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

وحسب تعريف الرنين فإن: $X = 0$

أي أن $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ أو $\omega L = \frac{1}{\omega C}$

وبما أن $\omega = 2\pi f$ فإن ذبذبة الرنين تعطى بالمعادلة $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ Hz

الشكل (5-2) يوضح تغير القيمة المطلقة لـ Z وكذلك مركباتها الثلاث R و X_L و X_C كدوال في ω ونلاحظ أنه عندما $\omega = \omega_0$ فإن الممانعة الحثية تساوي الممانعة السعوية.



الشكل (5-2)

وبما أن $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$ فإن $Z = R$. وعلى ذلك فإن المعاوقة Z تكون أصغر ما يمكن وبما أن $I = \frac{V}{Z}$ فإن التيار تكون نهاية عظمى، وعند ذبذبات أقل من ω_0 فإن الممانعة السعوية تكون أكبر من الممانعة الحثية، ولهذا تكون زاوية المعاوقة سالبة. إذا كانت قيمة المقاومة صغيرة فإن الزاوية تتغير أكبر مع الذبذبة كما هو موضح في الشكل (5-2-ب)، وعندما تقترب ω من الصفر فإن زاوية المعاوقة تقترب من $-90°$.

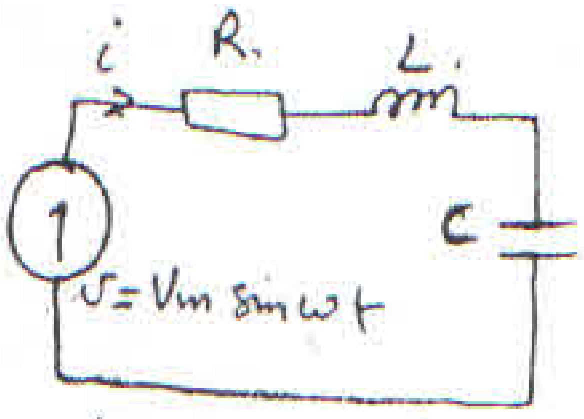
وعند ذبذبات أكبر من ω_0 فإن الممانعة الحثية تكون أكبر من الممانعة السعوية ولهذا تكون زاوية المعاوقة موجبة وتقترب من $90°$ عندما $\omega >> \omega_0$ كذا يوضح الشكل (5-2-جـ) تغير السماحية $Y = \frac{1}{Z}$ لدارة التوالي في ω، وبما أن $I = VY$ فإن هذا الرسم يعطي أيضاً دلالة على تغير التيار.

(2)

ومع ذلك فإن الشكل (5-2-د) يوضح أن التيار يصل إلى نهايته العظمى عند ω_1، وعندما تكون المقاومة صغيرة فإن قيمة التيار تكون كبيرة ويوضح المنحنى المنقط الحالة النهائية عندما $R=0$.

5-1-ب: التيار وتكبير التيار لدارة RLC عند الرنين:

اعتبر الدائرة الموضحة في الشكل (5-3) وفي دراستنا هذه نعتبر فقط السعة للمصادر للترددات أو بمعنى آخر نحسب فقط القيمة العظمى للتيار فيكون:



الشكل (5-3)

$$X_{co} = \frac{1}{\omega_0 C}, \quad X_{Lo} = \omega_0 L \Rightarrow I_m = V_m \Big/ \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]$$

وللحصول على أكبر استجابة (أي أكبر قيمة للتيار عند تردد الرنين ω_0) فإنه يلزم أن تكون:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad أو \quad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

وبذلك تكون تيار الرنين هو: $I_{m0} = V_m/R$. وللحصول على كيفية تصرف التيار مع التردد تكتب معادلة التيار في الصورة التالية:

$$I_m = \frac{I_{m0} R}{R\left[1 + \frac{j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R}\right]} = \frac{I_0}{1 + j\frac{\omega L}{R}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)} = \frac{I_0}{1 + j\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega C R}\frac{\omega L}{\omega L}\right)}$$

وبوضع: $Q = \frac{\omega L}{R}$ (عامل الجودة) و $\gamma = \frac{\omega}{\omega_0}$ (التردد النسبي)، وعند الترددات القريبة جدا من الرنين تقترب γ من الواحد الصحيح وبتعريف الإزاحة الترددية النسبية δ فإن Q من النسبة $\frac{\omega L}{R}$ و

$$\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \gamma - 1 \Rightarrow 1 + \delta = \gamma$$

$$\frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \frac{1}{(1+\delta)^2} \simeq 1 - 2\delta \Rightarrow \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \simeq 1 - 2\delta \Rightarrow 1 - \frac{1}{\gamma^2} \simeq 2\delta$$

$$I_m = I_0/(1 + j2\delta Q)$$

فيكون: $\frac{I_m}{I_0} = 1/1+jx$

وبوضع: $x \doteq 2\delta Q$ فإن:

$$G_i = I_m/I_0 = 1/1+jx. \quad I_m = \frac{I_0}{1+jx}$$

إذن تكبير التيار هو: $I_m = \frac{V_m}{R(1+jx)} = \frac{V_m}{Z_x}$.

وعليه كما سبقنا في الصورة

ولذلك لدارة رنين على التوالي تكتب مباشرة: $Z_x = R(1+jx)$

على أن لا ننسى أن ذلك صحيح فقط قريبا من الرنين:

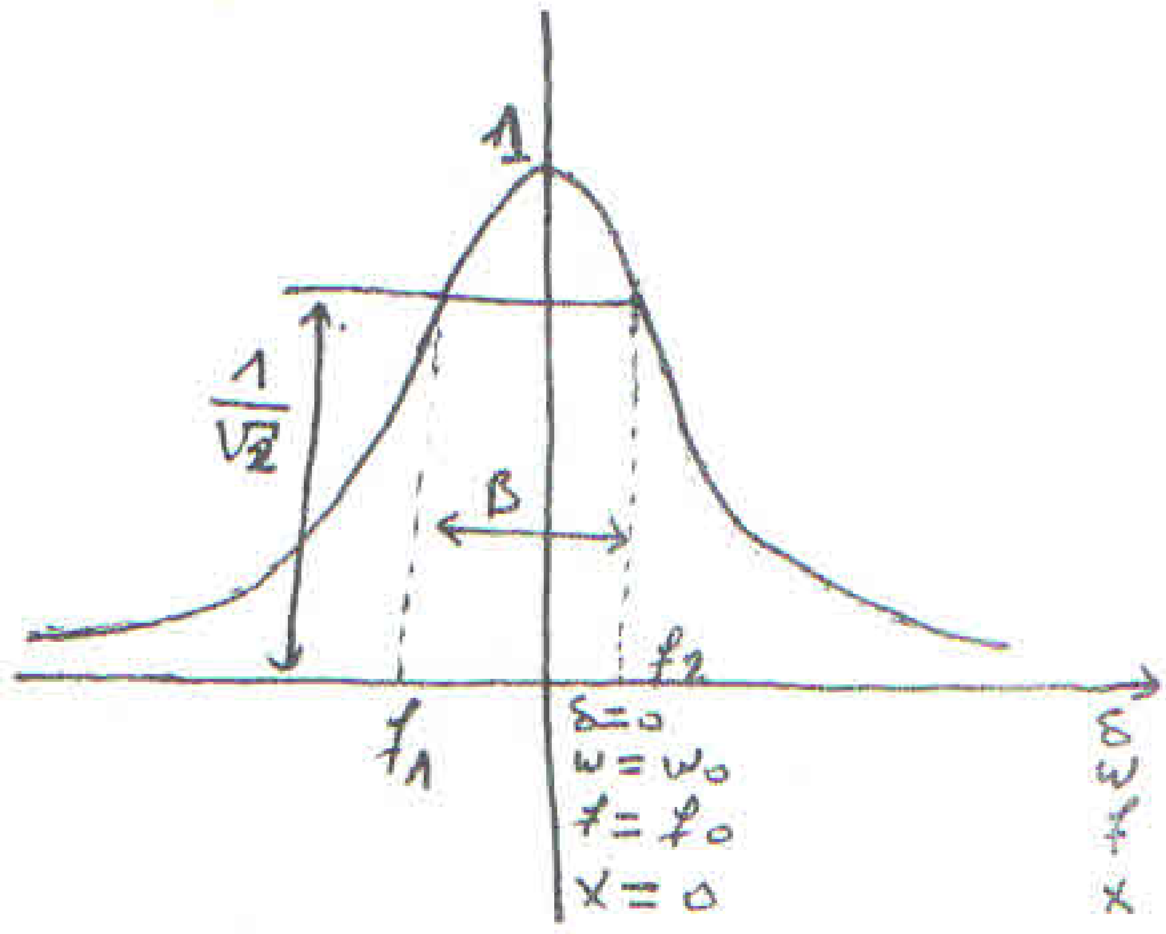
$$I_m = \frac{V_m}{Z_x} = \frac{V_m}{R(1+jx)}$$

$$|G_i| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1/\sqrt{1+(2\delta Q)^2}$$

ويكون منحنى الرنين $|G_i|$ له شكل منحنى الجرس كما في الشكل (5-4) وكلما كان المنحنى ضيقا حول الصفر أي كانت Q أكبر وكانت الدائرة أكثر جودة ولذلك تسمى Q بمعامل الجودة. وتسمى الفترة الترددية التي ينخفض التيار إلى $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3)

من قيمته العظمى عند الرنين بفترة الإمرار، كما تسمى δ بالإزاحة الترددية النسبية و x بالتردد النسبي، ولإيجاد فترة الإمرار $B = 2\Delta f$ نضع



الشكل (4-5)

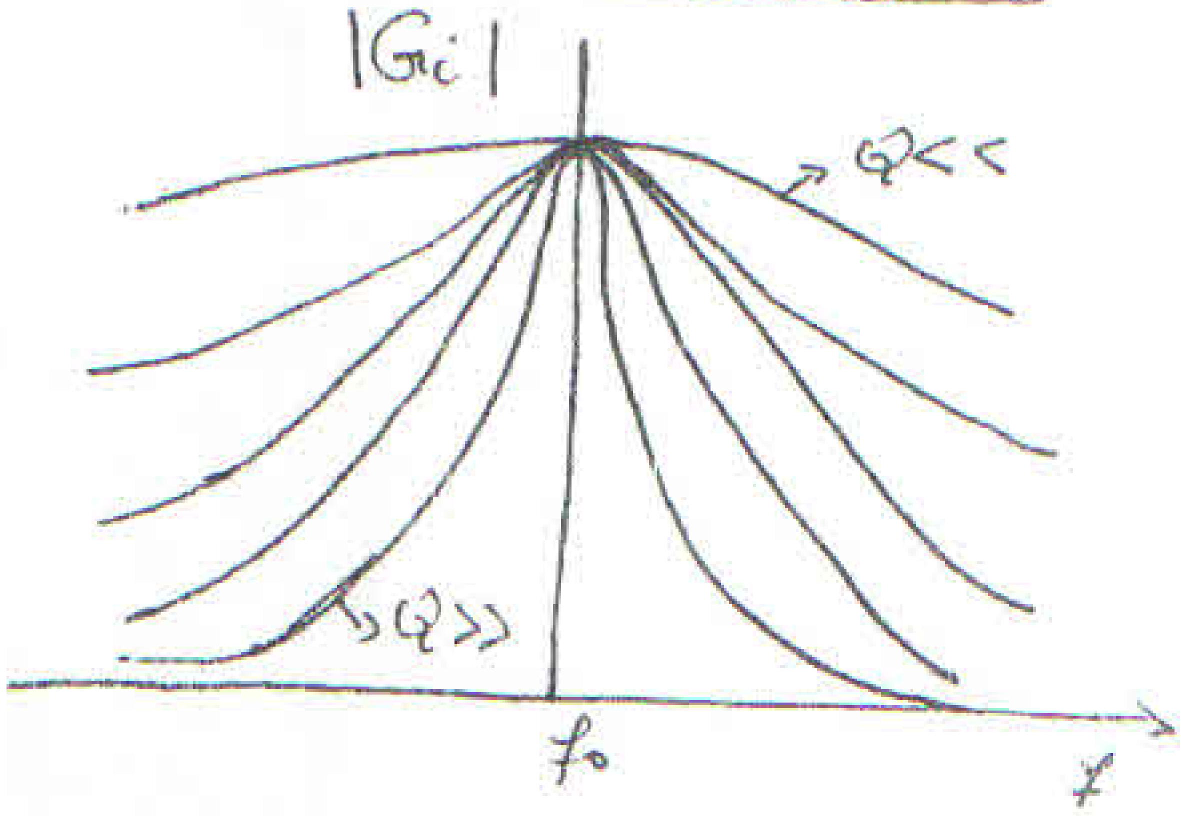
$$|G_i| = 1/\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(2\delta Q)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(1)^2}} \Rightarrow 2\delta Q = 1$$

$$\Rightarrow 2\delta = \frac{1}{Q} \Rightarrow 2\delta f_0 = f_0/Q .$$

وبذلك:

$$2\delta f_0 = \frac{f_0}{Q} = B = \text{فترة الإمرار}$$



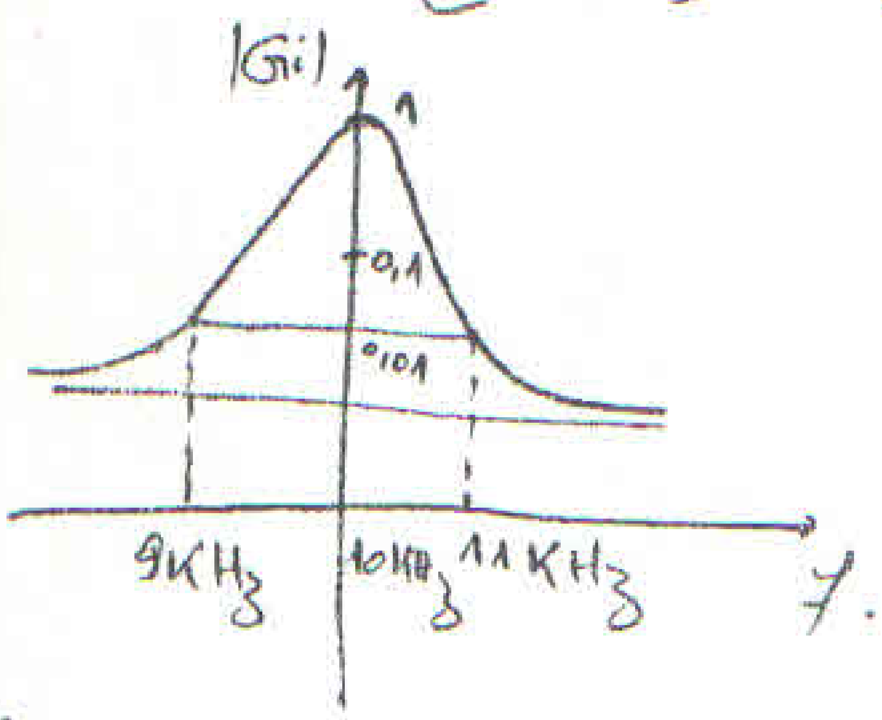
الشكل (5-5)

ويوضح الشكل (5-5) تأثير Q على منحنى $|G_i|$ حيث وجود منحنى (الذي له f_0 اصغر ما يكون) لـ Q أكبر ما يكون وحيث أن:

$$Q = w_0 L/R = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

فهي لذلك محكومة بقيم عناصر الدائرة لذلك يلزم الموازنة عليا الحصول على w_0 المطلوبة بأكبر معامل جودة ممكن الوصول إليه.

مثال: أوجد دارة الرنين على التوالي تعطي منحنى تكبير التيار الموضح في الشكل إذا علمت أن $R = 100\,\Omega$ فحدد معامل الجودة ونقطتي منتصف القدرة (f_2, f_1) وحيز الترددات المسموحة B مبيناً أن $f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$



الحل: واضح من الشكل أن:

$f_0 = 10\,KHz$

$$|G_i|_{9\,KHz} = |G_i|_{11\,kHz} = 0{,}01 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \simeq \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 100}$$

$$2\delta Q = x \Rightarrow \boxed{Q = 500}$$

فيما أن

وبما أن:

$$Q = \frac{w_0 L}{R} = \frac{1}{w_0 C R} = 500$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = \frac{1}{w_0 R Q} = 313\ PF \\ L = \frac{QR}{w_0} = 794\ mH \end{cases}$$

لتحديد نقطتي منتصف القدرة نضع

$$|G_i| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+(1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow x = \pm 1$$

و

$$\frac{f_0 - f_1}{f_0} = \frac{1}{2Q}$$

ونظراً لأن Q كبيرة فإن:

$$f_1 = f_0\left(1 - \frac{1}{2Q}\right)$$

$$f_2 = f_0\left(1 + \frac{1}{2Q}\right)$$

$$f_1 f_2 = f_0^2\left(1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2\right) \simeq f_0^2$$

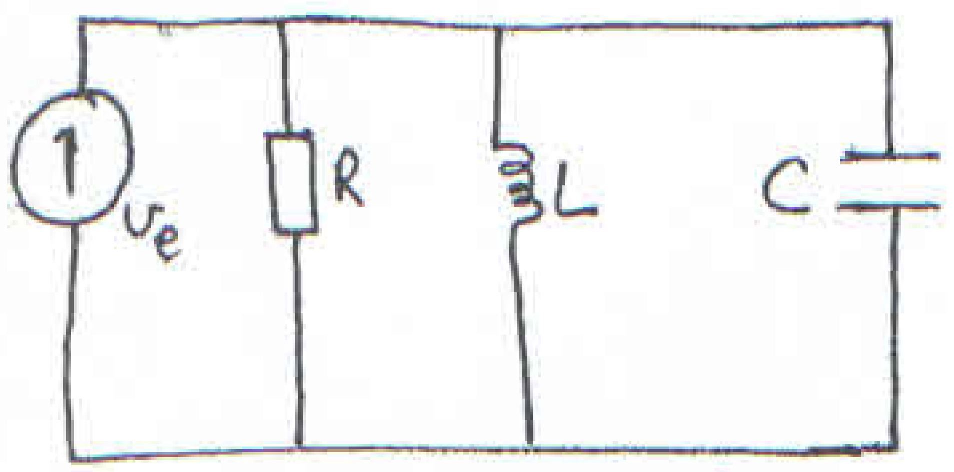
إذن:

$$f_1 = 10\left(1 - \frac{1}{1000}\right) = 9{,}99\,kHz$$

$$f_2 = 10\left(1 + \frac{1}{1000}\right) = 10{,}01\,KHz$$

4-2 : دائرة رنين على التوازي:

4-2-أ : مسامحة دارة RLC على التوازي:



الشكل (5-6)

لنعتبر دارة التوازي الموضحة في الشكل (5-6) والتي تتكون من أفرع في كل منها عنصر من العناصر R و L و C بأنها دارة مثالية. ويمكن مقارنة دارة التوازي المثالية هذه بدارة التوالي السابق دراستها مما يوضح إزدواجية مشتركة بين الدائرتين.
إن مسامحة العناصر الثلاثة هي:

$$Y = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = G + jB .$$

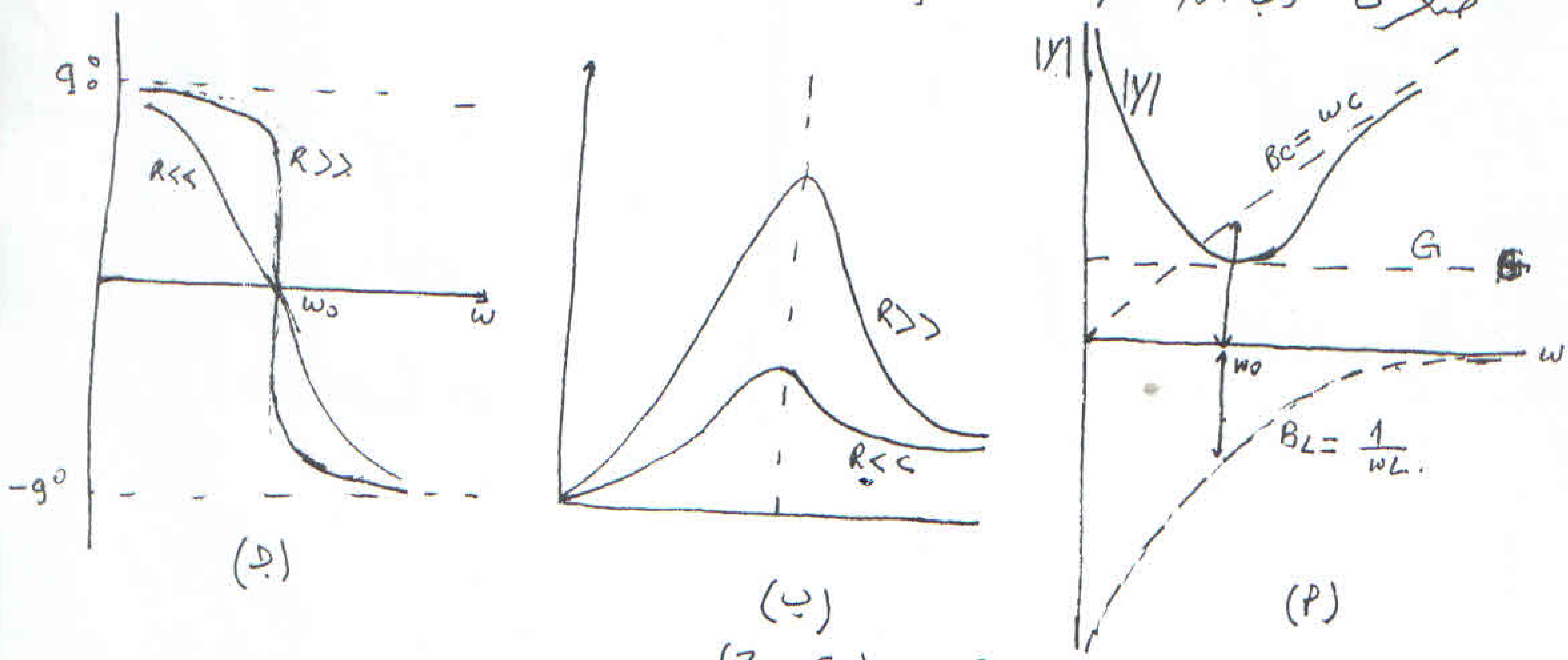
حيث : $G = \frac{1}{R}$ و $B_L = \frac{1}{\omega L}$ و $B_C = \omega C$ و $B = B_C - B_L$

الدارة تكون في حالة رنين عندما $B = 0$ أي عندما $\omega C = \frac{1}{\omega L}$ أو $\omega_0 = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

وكما في دارة رنين التوالي فإن ذبذبة الرنين هي:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \ Hz .$$

يوضح الشكل (5-7-أ) تغير كل من القيمة المطلقة للمسامحة Y ومركباتها الثلاثة B_L و B_C و G كدوال في الذبذبة ω وعند $\omega = \omega_0$ فإن التقبلية السعوية والحثية تكونان متساويتان و $Y = G$. وعلى ذلك فعند الرنين تكون المسامحة نهاية صغرى، وبما أن $I = VY$ فإن التيار تكون نهاية صغرى أيضا.



الشكل (5-7)

وعند ذبذبة أقل من ω_0 تزيد التقبلية الحثية عن التقبلية السعوية وتكون زاوية Y سالبة، ومع ذلك فإن زاوية المعاوقة تكون موجبة وتقترب من $+90°$ عندما تقترب ω من الصفر، أنظر الشكل (5-7-ج) وعند ذبذبة أكبر من ω_0 فإن زاوية Y تكون سالبة وتكون تغيرها كدالة في ω أسرع عندما تكون قيمة R كبيرة.

2 - ب : التيار وتكبير التيار لدارة رنين مسطحة على التوازي :

لنفس الدارة الموضحة في الشكل (5-6) وبنفس الخطوات المتبعة في الفقرة السابقة نجد :

$$I_m = \frac{V_m}{R} + \frac{V_m}{j\omega L} + V_m j\omega C = \frac{V_m}{R}\left(1 + \frac{R}{j\omega L} + jR\omega C\right)$$

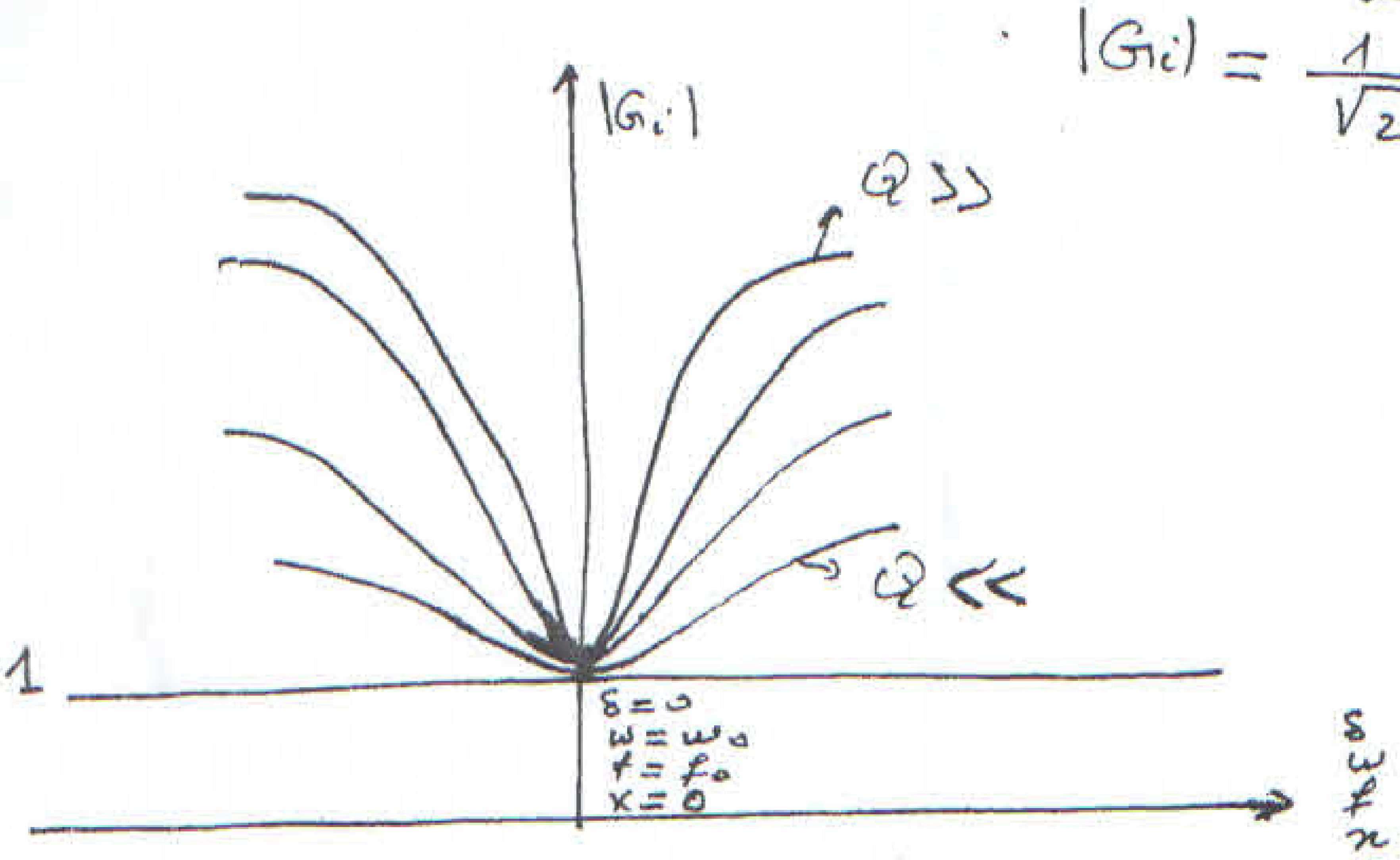
$$I_m = \frac{V_m}{R}\left[1 + \frac{R}{j\omega L}\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)\right] = \frac{V_m}{R}\left(1 + j2\delta Q\right) = I_0(1+jx)$$

$$\Rightarrow \boxed{I_m = I_0(1+jx)}$$

حيث $x = 2\delta Q$ و $|Z_x| = \frac{R}{\sqrt{1+x^2}}$

أما تكبير التيار فهو : $|G_i| = \left|\frac{I_m}{I_0}\right| = \sqrt{1+x^2}$

ويبين الشكل (5-8) تغيرات $|G_i|$ ، كما أن نقطتي منتصف القدرة يحددان من العلاقة : $|G_i| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



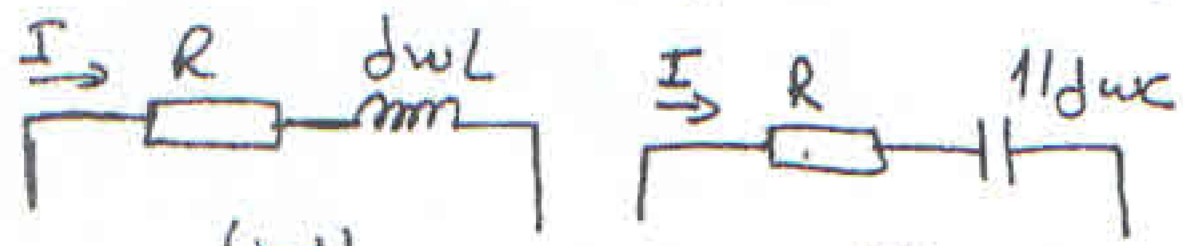
الشكل (5-8)

3 - 4 : عامل الجودة :

يعرف عامل الجودة للملفات والمكثفات والدوائر بأنه :

$$Q = \frac{\text{أكبر طاقة مخزونة}}{\text{الطاقة المستنفذة في كل دورة}} \times 2\pi$$

لتبين الشكل (5-9) الموضح لدارتي توالي RL و RC حيث تعطى الطاقة المستنفذة في المقاومة أي في الدورة لكل منهما بحاصل ضرب متوسط الطاقة $(I_m/\sqrt{2})^2 R$ وزمن الدورة هو T أو $\frac{1}{f}$.



الشكل (5-9)

وتعطى أكبر طاقة مخزونة في الدائرة RL بـ : $\frac{1}{2} L I_{max}^2$

$$\Rightarrow \boxed{Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} L I_{max}^2}{(I_{max}^2/2) R \left(\frac{1}{f}\right)} = \frac{2\pi f L}{R} = \frac{\omega L}{R}}$$

أما فيما يخص الدارة RC فإن :

$$\boxed{Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} I_{max}^2/\omega^2 C}{(I_{max}^2/2) R / (1/f)} = \frac{1}{\omega C R}}$$

والطاقة المخزونة في دائرة RLC على التوالي عند الرنين ثابتة . وذلك لأنه عندما تكون جهد المكثف أعظميا تمكين تكون تيار الملف مساويا للصفر والعكس بالعكس أي:

$$\frac{1}{2} C V_{max}^2 = \frac{1}{2} L I_{max}^2$$

إذن:

$$Q_0 = \frac{w_0 L}{R} = \frac{1}{w_0 C R}$$

أما دائرة التوازي RLC فيعطى بالعلاقة:

$$\boxed{Q_0 = \frac{R}{w_0 L} = w_0 C R}$$

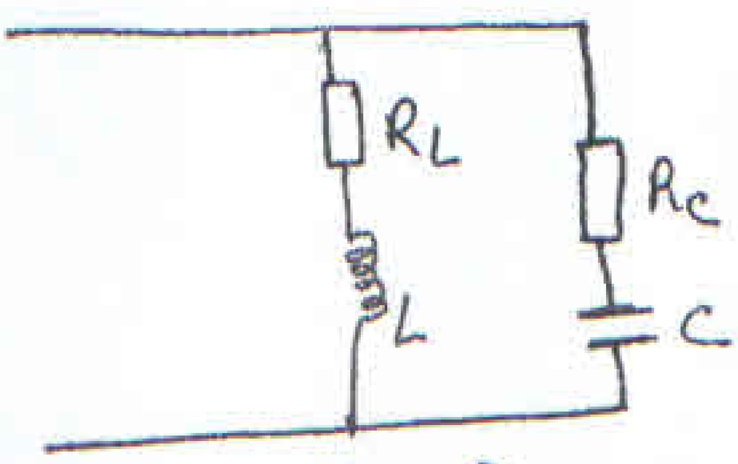
مثال: أحسب فرق الجهد على المكثف في حالة الرنين وذلك لـ:

أ) دارة موصلة على التوالي. ب) دارة موصلة على التوازي.

وبين أنه يساوي من حيث القيمة ويضاد في الإشارة فرق الجهد على الملف في الحالة (أ) ويساوي تماما في الحالة (ب)؟

4-4: دائرة رنين توازي حقيقية:

تتكون المسامحة Y لدارة التوازي المتكونة من فرعين والموضحة في الشكل (5-10) من مجموع مسامحة كل فرع على حدة.



الشكل (5-10)

$$Y = Y_L + Y_C = \frac{1}{R_L + jX_L} + \frac{1}{R_C - jX_C}$$

$$Y = \left(\frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + X_C^2}\right) + j\left(\frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} - \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2}\right)$$

والدارة تكون في حالة رنين إذا كانت المسامحة المركبة عددا حقيقيا إذن:

$$\frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} = \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2}$$

$$\Rightarrow \quad X_C (R_L^2 + X_L^2) = X_L (R_C^2 + X_C^2)$$

$$\frac{1}{w_0 C}(R_L^2 + w_0^2 L^2) = w_0 L \left(R_C^2 + \frac{1}{w_0^2 C}\right) \longrightarrow (1)$$

ويمكن تغيير أي من الكميات الخمس الموجودة في المعادلة (1) للحصول على الرنين.

وبحل المعادلة (1) نحصل على:

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}} \longrightarrow (2)$$

وعلى ذلك فإن ذبذبة الرنين w_0 لدارة توازي تتكون من فرعين تختلف عن مثيلتها في دارة التوازي التي تتكون من العناصر النقية R و L و C على التوازي بالعامل:

$$\sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}}$$

وحيث أن الذبذبة لابد وأن تكون عددا حقيقيا موجبا فإنه تكون للدارة ذبذبة رنينه ω_0 عندما :

$$R_C^2 < \frac{L}{C} \quad \text{و} \quad R_L^2 < \frac{L}{C} \quad \text{أو} \quad R_C^2 > L/C \quad \text{و} \quad R_L^2 > L/C$$

وعندما $R_L^2 = R_C^2 = \frac{L}{C}$ فإن الدارة تكون في حالة رنينه عند جميع الذبذبات .

وبحل المعادلة (1) للحصول على L نجد:

$$L = \frac{1}{2} C \left[(R_C^2 + X_C^2) \pm \sqrt{(R_C^2 + X_C^2) - 4R_L^2 X_C^2} \right]$$

وبما أنه : $Z_C = \sqrt{R_C^2 + X_C^2}$ فإن :

$$L = \frac{1}{2} C \left[Z_C^2 \pm \sqrt{Z_C^4 - 4R_L^2 X_C^2} \right] \longrightarrow (3)$$

والآن إذا كان في هذه المعادلة $Z_C^4 > 4R_L^2 X_C^2$ فإننا نحصل على قيمتين لـ : L تكون الدارة عندهما في حالة رنينه . وإذا كان $Z_C^4 = 4R_L^2 X_C^2$ فإن الدارة تكون في حالة رنينه عند : $L = \frac{1}{2} C Z_C^2$ ، وعند $Z_C^4 < 4R_L^2 X_C^2$ فإنه لا توجد قيمة لـ : L تجعل الدارة في حالة رنينه.

أما قيمة C فتعطى بالعلاقة :

$$C = 2L \left[\frac{1}{Z_L^2 \pm \sqrt{Z_L^4 - 4R_C^2 X_L^2}} \right] \longrightarrow (4)$$

وهنا إذا كان $Z_L^4 > 4R_C^2 X_L^2$ فإننا نحصل على قيمتين لـ C تكون الدارة عندهما في حالة رنينه .

وبحل المعادلة (1) للحصول على R_L نجد أن :

$$R_L = \sqrt{\omega^2 LC R_C^2 - \omega^2 L^2 + \frac{L}{C}} \longrightarrow (5)$$

أما R_C فتعطى بـ :

$$R_C = \sqrt{R_L^2/(\omega^2 LC) - \frac{1}{\omega^2 C^2} + \frac{L}{C}} \longrightarrow (6)$$

وإذا كان الجذر في المعادلتين الأخيرتين موجبا فإننا نحصل على قيمة لكل من R_C و R_L تكون عندهما دارة التوازي المكونة من فرعين في حالة رنينه .