REPRESENTATION D'ETAT DES SYSTEMES

6. RESOLUTION DES EQUATIONS D'ETAT

Nous allons montrer comment déterminer la réponse d'un système dynamique, modélisé sous forme de représentation d'état, à des grandeurs d'entrée principales ou secondaires ou à des conditions initiales.

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A * x(t) + B * u(t) & \text{Equation d'état} \\ y(t) = C * x(t) + Du(t) & \textit{Equation de mesure} \end{cases} \qquad (1)$$

La résolution des équations d'état consiste à déterminer les expressions temporelles des *n* variables d'état connaissant l'entrée *u(t)* qui leurs est appliquées.

6.1 Cas d'une équation scalaire

Dans un premier temps, pour fixer les idées, on se place dans le cas scalaire c.-à-d., le système est d'ordre n = 1 et a une seule variable d'état (t). Dans ce cas, les équations (1) peuvent s'écrire comme suit:

$$\dot{x}(t) = a * x(t) + b * u(t) \quad \text{avec:} \quad x(t_0 = 0) = x_0 \qquad (23)$$

$$y(t) = c * x(t) + du(t) \qquad (24)$$

Ou a, b, c et d sont des constantes

***6.1.1.* Réponse libre:** Il s'agit ici de voir comment le système réagit librement à la seule condition initiale et en absence de l'entrée. C'est la réponse du système autonome.

$$\dot{x}(t) = ax(t) \Rightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = a \Rightarrow \frac{\mathrm{d}[ln(x(t))]}{\mathrm{dt}} = a$$

Intégrons le dernier terme entre t_0 = 0 et t, on aura :

$$[ln(x(t))]_{t_0}^{t} = a[t]_0^t$$

-

$$ln(x(t)) - ln(x(t_0)) = a\,t \Rightarrow ln\left(\frac{x(t)}{x(t_0)}\right) = a\,t \Rightarrow \frac{x(t)}{x(t_0)} = e^{a\,t}$$

-

Finalement, la réponse libre de l'équation (23) est:

$$x(t) = x_0 e^{at} \tag{24}$$

6.1.2. Réponse complète (totale): Il s'agit ici de voir comment le système réagit en présence de l'entrée. On utilise la méthode de variation des constantes :

$$x(t) = k(t)e^{at} \tag{25}$$

$$\dot{x}(t) = a\,\underbrace{k(t)e^{at}}_{x(t)} + \dot{k}(t)e^{at} = ax(t) + \dot{k}(t)e^{at}$$

$$\dot{x}(t) = ax(t) + \dot{k}(t)e^{at} = ax(t) + bu(t)$$

$$\Rightarrow \dot{k}(t) = e^{-at}bu(t)$$

$$\Rightarrow k(t) = k(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau$$

En remplaçant l'expression (t) dans (25), on obtient:

$$x(t) = k(t)e^{at} = \left[k(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}bu(\tau)\,d\tau\right] e^{at}$$

A partir de (25), on a $k(t_0) = x(t_0) = x_0$

$$x(t) = k(t)e^{at} = \left[x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau\right] e^{at}$$

Alors, on a:

$$x(t) = x_0 e^{at} + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \tag{26}$$

Finalement, en remplaçant (26) dans l'équation de sortie de (1), on obtient la réponse totale du système :

$$y(t) = \underbrace{cx_0 e^{at}}_{\substack{Réponse\\ libre}} + \underbrace{c\int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}b\,u(\tau)d\tau + du(t)}_{Réponse\ forcée} \tag{27}$$

Remarque: Dans la réponse (27), l'on peut faire une distinction utile dans le membre de droite et faire apparaitre deux réponses:

Le réponse libre : elle correspond au premier terme et ne dépend que du modèle du système (présence du pôle a) et de la condition initiale (présence de x_0). Elle ne dépend pas de l'action extérieure (commande).

La réponse forcée : elle est associée aux deux derniers termes et correspond en fait à la réaction du système à l'excitation (t). Elle dépend du modèle du système (présence de a) mais aussi de la nature du signal (t).

6.2 Cas d'une équation matricielle

Dans le cas où le système est d'ordre $n > 1$, donc possède n variables d'état $xi(t)$.

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A * x(t) + B * u(t) & \text{Equation d'état} \\ y(t) = C * x(t) + Du(t) & \textit{Equation de mesure} \end{cases} \qquad (1)$$

Avec $x(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T$ est le vecteur d'état, $x(t_0) = x_0 = [x_1^0(t) \dots x_1^0(t)]^T$ est la condition initiale et A, B, C et D sont des matrices de dimensions appropriées.

La solution d'un tel système matriciel est analogue à celle obtenue dans le cas scalaire, donc, en remplaçant les scalaires a, b, c et d dans (26) et (27) par les matrices A, B, C et D respectivement, il vient :

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad (28)$$

Cependant cela nous amène à considérer une fonction matricielle de type nouveau, e^{At} où A est une *matrice*.

Posons : $\phi(t) = e^{At}$ (29)

Remplaçons (29) dans (28), il vient

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \qquad (30)$$

$\phi(t)$ est une matrice dite *matrice de transition d'état*.

Le problème de la résolution des équations d'état se ramène au problème de calcul de la matrice de transition. Avant de décrire différentes méthodes pour l'obtention de la matrice de transition, nous montrons quelques propriétés de cette matrice.

6.2.1 Propriétés de la matrice de transition d'état

Propriété 1 : $\Phi(0) = e^{A\times 0} = I$ (où I matrice identité).

Propriété 2 : $\Phi(t) = e^{At} = [e^{-At}]^{-1} = [\Phi(-t)]^{-1}$, $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$.

Propriété 3 : $\Phi(t_1 + t_2) = e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2} = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$.

Propriété 4 : $[\Phi(t)]^n = \Phi(nt)$.

Propriété 5 : $\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_1 - t_0)\Phi(t_2 - t_1)$.

6.2.2 Calcul de la matrice de transition d'état

Le calcul de la matrice de transition dans la résolution des équations d'état est l'opération la plus délicate, ou plusieurs méthodes existent, ici on cite la plus classique basée sur la transformation de Laplace. Il s'agit de calculer e^{At}.

a) Méthode de transformée de Laplace

Soit l'équation d'état $\dot{x}(t) = A * x(t) + B * u(t)$ avec: $x(t_0 = 0) = x_0$

En posant u(t)=0

$$\dot{x}(t) = A * x(t)$$

$$TL\,[x^{\cdot}(t)] = TL[A * x(t)]$$

$$pX(p) - X_0 = AX(p)$$

$$X(p) = [pI - A]^{-1} * x_0 \Longrightarrow TL^{-1}[X(p)] = x(t) = TL^{-1}[[pI - A]^{-1}]x_0$$

Finalement

$$x(t) = TL^{-1}[[pI - A]^{-1}]x_0 \qquad (31)$$

D'autre part, d'après la section précédente, la réponse libre d'équation d'état à t_0 =0:

$$x(t) = e^{At}x_0 \qquad (32)$$

Par identification de (31) et (32), on aura

$$e^{At} = TL^{-1}[(sI - A)^{-1}] \qquad (33)$$

Exemple1:

Soit le système suivant soumit à u(t) échelon unité

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

Calculer la matrice de transition e^{A}

$$[pI-A]^{-1}=\frac{[adj(pI-A)]^{T}}{\det(pI-A)}=\frac{\begin{bmatrix}p+3 & 1\\ -2 & p\end{bmatrix}}{(p+1)(p+2)}=\begin{bmatrix}\frac{p+3}{(p+1)(p+2)} & \frac{1}{(p+1)(p+2)}\\ \frac{-2}{(p+1)(p+2)} & \frac{p}{(p+1)(p+2)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\left(\frac{k_1}{p+1}+\frac{k_2}{p+2}\right) & \left(\frac{k_3}{p+1}+\frac{k_4}{p+2}\right)\\ -2\left(\frac{k_3}{p+1}+\frac{k_4}{p+2}\right) & \left(\frac{k_5}{p+1}+\frac{k_6}{p+2}\right)\end{bmatrix}$$

$$k_1=\lim_{p\to -1}(p+1)\left(\frac{p+3}{(p+1)(p+2)}\right)=2,\quad k_1=\lim_{p\to -2}(p+2)\left(\frac{p+3}{(p+1)(p+2)}\right)=-1$$

$$k_3\lim_{p\to -1}(p+1)\left(\frac{1}{(p+1)(p+2)}\right)=1,\quad k_4=\lim_{p\to -2}(p+2)\left(\frac{1}{(p+1)(p+2)}\right)=-1$$

$$k_5=\lim_{p\to -1}(p+1)\left(\frac{p}{(p+1)(p+2)}\right)=-1,\quad k_6=\lim_{p\to -2}(p+2)\left(\frac{p}{(p+1)(p+2)}\right)=2$$

$$[pI-A]^{-1}=\begin{bmatrix}\left(\frac{2}{p+1}+\frac{-1}{p+2}\right) & \left(\frac{1}{p+1}+\frac{-1}{p+2}\right)\\ -2\left(\frac{1}{p+1}+\frac{-1}{p+2}\right) & \left(\frac{1}{p+1}+\frac{2}{p+2}\right)\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=TL^{-1}\begin{bmatrix}\left(\frac{2}{p+1}+\frac{-1}{p+2}\right) & \left(\frac{1}{p+1}+\frac{-1}{p+2}\right)\\ -2\left(\frac{1}{p+1}+\frac{-1}{p+2}\right) & \left(\frac{1}{p+1}+\frac{2}{p+2}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

b) Méthode de diagonalisation de la matrice A

Si la matrice d'état A est diagonale, on montre facilement que:

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}\Rightarrow e^{A}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n}\end{bmatrix}$$

D'où l'idée de passer par un changement de variables judicieux, de la représentation d'état initiale vers une autre représentation faisant intervenir une matrice d'état diagonale.

Si A est une matrice carrée ($n\times n$) quelconque, les *n* valeurs propres *distincts* de A sont notés λi, elles sont associées aux *n* vecteurs propres Vi par :

$$AV_i = \lambda_i V_i \qquad i = 1 \dots n \tag{34}$$

D'où

$$\begin{cases} AV_1 = \lambda_1 V_1 \\ AV_2 = \lambda_2 V_2 \\ \quad \vdots \\ AV_n = \lambda_n V_n \end{cases} \tag{35}$$

Sous forme matricielle:

$$A[V_1 \ \ V_2 \ \dots V_n] = [V_1 \ \ V_2 \ \dots V_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{36}$$

En multipliant à gauche les deux membres de (36) par $[V_1 \ \ V_2 \dots V_n]^{-1}$:

$$\underbrace{[V_1 \ \ V_2 \ \dots V_n]^{-1}}_{T^{-1}} A \underbrace{[V_1 \ \ V_2 \ \dots V_n]}_{T} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\Delta} \tag{37}$$

Finalement:

$$T^{-1}AT = \Delta \Rightarrow A = T\Delta T^{-1} \tag{38}$$

$$e^{At} = Te^{\Delta t} T^{-1} \tag{39}$$

Exemple 2: Calculer la matrice de transition e^{A}du système donné dans l'exemple 1.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres:

$$det(\lambda I - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Vecteurs propres :

$$z = [z_1 \quad z_2]^T , v = [v_1 \quad v_2]^T$$

$Az = \lambda_1 z$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \Rightarrow z_1 = -z_2$$

On pose

$z_1 = 1 \Rightarrow z_2 = -1,\ z = [1 \quad -1]^T$

$Aw = \lambda_2 v$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} v_1 \\ v \end{bmatrix} \Rightarrow -2v_1 = v_2$$

On pose

$v_2 = 2 \Rightarrow z_1 = -1, v = [-1 \quad 2]^T$

alors

$$T = [z \quad w] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vérification

$$A = T\Delta T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = Te^{\Delta t}T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

c) Méthode de SYLVESTER

Si la matrice A possède *n* valeurs propres distinctes λi, on montre que :

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t}\left[\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(A - \lambda_j I)}{(\lambda_i - \lambda_j)}\right] \tag{40}$$

Remarque : pour les valeurs propres multiples, une autre formule de Sylvester, plus compliquées est utilisée.

Exemple 3 : Calculer la matrice de transition e^A du système donné dans l'exemple 1.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres: $\lambda_1 = -1\ et\ \lambda_2 = -2$

$$e^{At}=\sum_{i=1}^{2}e^{\lambda_i t}\left[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2}\frac{(A-\lambda_j I)}{(\lambda_i-\lambda_j)}\right]=e^{\lambda_1 t}\left[\frac{(A-\lambda_2 I)}{(\lambda_1-\lambda_2)}\right]+e^{\lambda_2 t}\left[\frac{(A-\lambda_1 I)}{(\lambda_2-\lambda_1)}\right]$$

$$=e^{-t}\left[\frac{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}}{1}\right]+e^{-2t}\left[\frac{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}}{-1}\right]$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

d) Méthode de CAYLEY-HAMILTON

Cette méthode, qui repose sur la propriété d'une matrice d'être toujours solution de son équation caractéristique, présente l'avantage d'être relativement rapide pour des matrices d'ordres peu élevés et de mettre en œuvre des calculs moins complexes, donc moins générateurs d'erreurs de calcul.

Considérons une matrice **A** et son équation caractéristique

$$\det(\lambda I-A)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0 \qquad (41)$$

On a toujours

$$A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0I=0\Rightarrow A^n=-a_{n-1}A^{n-1}-\cdots-a_1A-a_0I=0 \qquad (42)$$

Donc, pour toutes matrices carrées possédant *n* valeurs propres distinctes, toute puissance de A supérieure ou égale à *n* peut s'exprimer en fonction d'une combinaison des puissances de A inferieures à *n*.

$$e^{At}=I+At+\frac{A^2t^2}{2!}+\cdots+\frac{A^nt^n}{n!}$$

$$e^{At}=\alpha_{n-1}(t)A^{n-1}+\alpha_{n-2}(t)A^{n-2}+\cdots+\alpha_1(t)A+\alpha_0(t)I \qquad (43)$$

Notons que tous les valeurs propres λ_i de la matrice A vérifient également cette équation, c-à-d :

$$e^{\lambda_i t}=\alpha_{n-1}(t)\,\lambda_i^{\,n-1}+\alpha_{n-2}(t)\,\lambda_i^{\,n-2}+\cdots+\alpha_1(t)\,\lambda_i+\alpha_0(t)I \qquad (44)$$

En résumé cette méthode consiste à calculer e^{At} de la façon suivante :

$$e^{At}=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i(t)A^i \qquad (45)$$

où les fonctions $\alpha_i(t)$ sont à calculer en résolvant le système d' équations suivant :

$$e^{\lambda_i t} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t)\lambda_i^j \tag{46}$$

Exemple 4: Calculer la matrice de transition e^A du système donné dans l'exemple 1.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres: $\lambda_1 = -1 \; et \; \lambda_2 = -2$

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{1} \alpha_i(t)A^i = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)I$$

$$e^{-t} = \sum_{j=0}^{1} \alpha_j(t)\lambda_1^j = \alpha_0(t) - \alpha_1(t)\,, \quad e^{-2t} = \sum_{j=0}^{1} \alpha_j(t)\lambda_2^j = \alpha_0(t) - 2\alpha_1(t)$$

$$\begin{cases} e^{-t} = \alpha_0(t) - \alpha_1(t) \\ e^{-2t} = \alpha_0(t) - 2\alpha_1(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1(t) = e^{-t} - e^{-2t} \\ \alpha_0(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \end{cases}$$

$$e^{At} = \alpha_i(t)I + \alpha_i(t)I = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$