Chapitre I

Introduction à la résistance des matériaux

1.1 Introduction :

La résistance des matériaux ou la mécanique des matériaux est une branche de la mécanique appliquée servant à étudier le comportement des corps solides sous l'action des différents types de charges.

La résistance des matériaux traite non seulement les méthodes d'ingénieurs employées pour le calcul de la capacité des structures et de ses éléments à supporter les charges qui leurs sont appliquées sans se détruire, ou se déformer appréciablement, mais aussi à présenter les critères de base pour la conception des structures (forme, dimensions,...) et l'utilisation des matériaux dans les meilleurs conditions de sécurité et d'économie.

1.2 Hypothèses de la R.D.M

Les principales hypothèses de la résistance des matériaux sont les suivantes:

L'homogénéité, l'isotropie et la continuité du matériau : On suppose que le matériau possède les mêmes propriétés élastiques en tous les points du corps, dans toutes les directions en un point quelconque du corps, et que le matériau est assimilé à un milieu continu.

L'élasticité et la linéarité du matériau: On suppose admet qu'en chaque point contraintes et déformations sont proportionnelles et qu'après déformation, l'élément revient à son état initiale.

La petitesse des déformations : les déformations dues aux charges sont négligeables par rapport aux dimensions des éléments et la configuration géométrique reste inchangée.

Hypothèse des sections planes (hypothèse de Navier-Bernoulli): Les sections droites restent planes et normales à la fibre moyenne au cours de la déformation.

Hypothèse de Saint Venant : Tous les efforts qui interviennent dans la théorie peuvent être schématisés par leur torseur résultant.

1.3 But de la résistance des matériaux

Le but de la RDM est de déterminer par calcul ou par expérience, la distribution des forces internes (contraintes) et des déformations des corps soumis à des forces externes. Les problèmes de RDM peuvent être des problèmes de conception ou d'analyse où:

1. On peut connaître les forces extérieures appliquées et rechercher quelles sont les dimensions à donner au corps pour que les efforts internes ou les déformations ne dépassent pas une certaine limite fixée d'avance: c'est un problème de conception ou de dimensionnement;

2. Connaissant les forces extérieures et les dimensions du corps, on peut se demander quels seront les efforts intérieurs ou les déformations résultant de l'application de ces forces et vérifier que ces efforts (ou ces déformations) sont bien inférieurs à une limite fixée d'avance. C'est un problème d'analyse ou de vérification.

La RDM constitue l'outil indispensable à l'ingénieur constructeur pour concevoir et réaliser des ouvrages économiques qui ne risquent pas de se rompre ni de se déformer excessivement sous les actions qui leur sont appliquées (charges, ou déformations imposées).

1.3 Applications de la résistance des matériaux

Le champ d’application de la RDM est très vaste et peut être rencontré dans chaque discipline de l'ingénierie:

– constructions (génie civil ou bâtiments
– mécanique (machines, moteurs, avions)
– chimie (réservoirs, chaudières)
– électricité (câbles, pylônes, centrales)
– physique (physique du solide)
– matériaux (physique des matériaux)
– etc.….

1.4 Corps étudiés en résistance des matériaux :

Quelque soit le degré de complexité d'un ouvrage, ses éléments indépendants ne peuvent être que, soit :

- *Barre* : Tout corps dont l'une des dimensions (la longueur) est beaucoup plus importante que les autres dimensions. Les barres peuvent être droites ou courbes. Leurs sections droites peuvent avoir plusieurs formes (figure –1.1-)

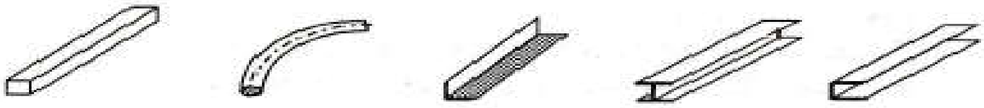

Fig. –1.1-

- *Plaque* : Tout corps délimité par deux surfaces planes séparées par une distance faible par rapport aux autres dimensions (figure -1.2-)

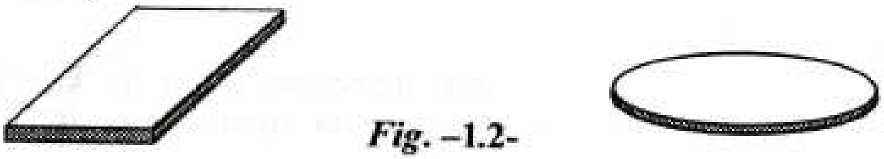

Fig. –1.2-

- *Enveloppe* : Tout corps délimité par deux surfaces curvilignes séparées par une distance faible par rapport aux autres dimensions (figure -1.3-)

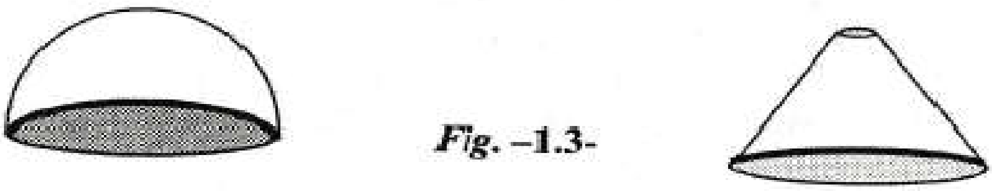

Fig. –1.3-

Chapitre II

Caractéristiques géométriques des sections planes

2.1. Introduction

Pour une sollicitation de traction ou compression simple, seule la donnée de l'aire de la section droite est nécessaire pour étudier ou vérifier la résistance d'une section d'une poutre par exemple. Pour toutes les autres sollicitations, la forme et les dimensions de la section droite de la poutre jouent un rôle prépondérant sur le comportement aux différentes sollicitations de torsion ou de flexion. Nous allons nous intéresser dans le présent chapitre aux caractéristiques suivantes :

- Aire d'une section
- Moment statique par rapport à une droite (ou un axe)
- Centre de gravité
- Moment quadratique d'une section par rapport à une droite (ou un axe)
- Moment de résistance

2.2. Aire d'une section

Par définition l'aire A d'une section est définie par l'intégrale:

$$A = \int_A dA \qquad (1.1)$$

Exemple 1.1

Calculer l' aire d' un triangle.

Solution 1.1

Soit la surface triangulaire plane montrée par la figure ci-dessous.

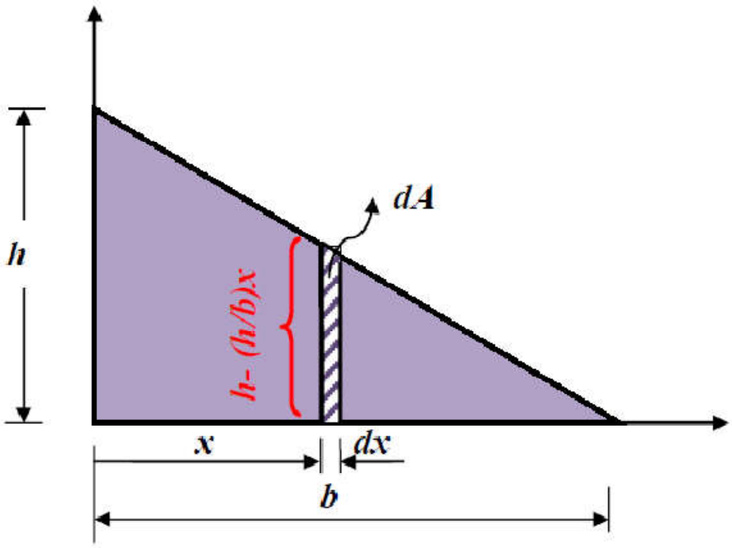

Fig. 2'.1

Considérons une surface élémentaire telle que:

$$dA = h\left(1 - \frac{x}{b}\right)dx$$

$$A = \int_A dA = \int_0^b h\left(1 - \frac{x}{b}\right)dx = \frac{bh}{2}$$

- ***Remarque***

Si la section est composée, nous la décomposons en sections usuelles et l'aire est calculée comme:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

- ***Exemple 1.2***

Calculer l'aire de la section droite de la poutre montrée par la figure ci-dessous. On donne $b_1 = 300$ *mm*, $b_2 = 150$ *mm*, $t_w = 10$ *mm*, $t_{f1} = 20$*mm*, $t_{f2} = 15$ *mm*, $h_w = 1000$ *mm.*

2.3. Moment statique

Le moment statique S d'une section par rapport à un axe *ox* ou *oy* (Fig. 2.2) est donné par l'une des expressions suivantes:

$$S_x = \int_A y.dA \qquad (2.2)$$

$$S_y = \int_A \text{x}.dA \qquad (2.3)$$

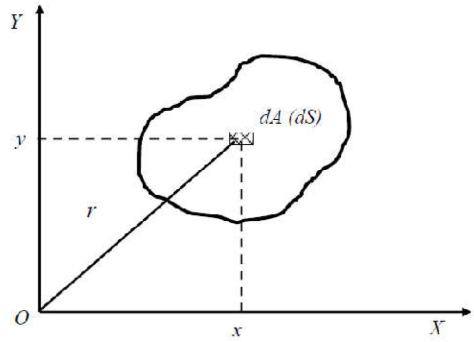

Fig. 2.2- Section plane.

Dans les relations ci-dessus :

Y : représente la distance entre l'aire élémentaire dA et l'axe X.

X : représente la distance entre l'aire élémentaire dA et l'axe Y.

A : représente l'aire totale de la section.

Si on procède à des translations parallèlement aux axes ox et oy, les moments statiques changent. Soit la section montrée par la figure (2.3) telle que S_X, S_Y, A sont connus et on se propose de déterminer $S_x^{'}$ et $S_y^{'}$.

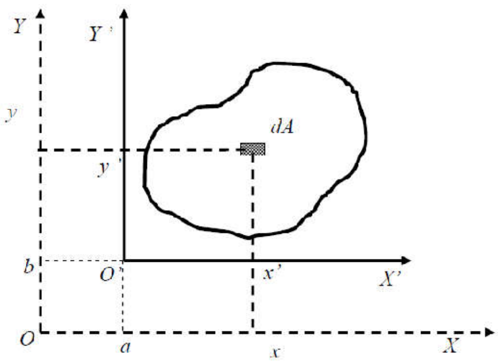

Fig. 2.3- Translation des axes

De la figure (1.5), on a:

$$x' = x - a \quad ; \quad y' = y - b$$

Par définition, on a:

$$S_{X'} = \int_A y' \, dA = \int_A (y-b) dA$$
$$S_{Y'} = \int_A X' \, dA = \int_A (x-a) dA$$

d'où:

$$S_{X'} = S_X - b.A \qquad (2.4)$$

$$S_{Y'} = S_Y - a.A \qquad (2.5)$$

2.4. Centre de gravité

On peut choisir *a* et *b* de sorte que $S_{X'}$ et $S_{Y'}$ soient nuls, c-à-d :

$$a = S_Y / A \quad ; \quad b = S_X / A$$

- l'axe pour lequel le moment statique est nul s'appelle axe **central**
- le point d'intersection de deux axes centraux s'appelle **centre de gravité** d'une section.

Ainsi, les coordonnées du centre de gravité d'une section s'écrivent :

$$x_G = S_Y / A \quad ; \quad y_G = S_X / A$$

2.5 Moment statique d'une section complexe :

Pour déterminer le moment statique d'une section plane complexe par rapport à un axe quelconque , (Δ) par exemple, on suit les étapes suiventes :

a) Subdiviser la section complexe en section simples (sections courantes : rectangle, carré, triangle , cercle, demi cercle…..) dont la surface et la position du centre de gravité sont connus pour chacune d'elles.
b) Calculer la moment statique par rapport à l'axe (Δ) , de chacune des sections simples obtenues de la subdivision de la section complexe

c) Ca lculer la somme algébrique de touts les moments statiques obtenus à l'étape –b- . cette somme représentra le moment statique de la section complexe par rapport à l' axe (Δ).

Exemple :

Les moments statiques par rapport aux axes X et Y de la section représentée sur la figure 2.4 peuvent être déterminés comme Suit :

$$S_x = S_x^{(1)} + S_x^{(2)} + S_x^{(3)} \qquad (2.6)$$

$$S_y = S_y^{(1)} + S_y^{(2)} + S_y^{(3)} \qquad (2.7)$$

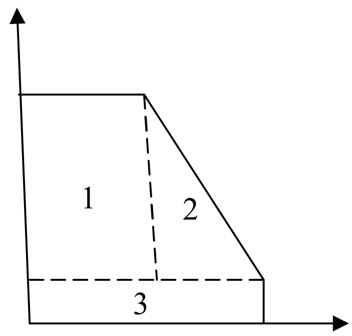

figure 2.4

Remarque :

Dans le cas d'une section pouvant être subdivisée à (n) section Simples, les relations (2.6) et (2.7) deviennent :

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} S_x^{(i)} = S_x^{(1)} + S_x^{(2)} + \ldots.. + S_x^{(n)} \qquad (2.8)$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} S_y^{(i)} = S_y^{(1)} + S_y^{(2)} + \ldots.. + S_y^{(n)} \qquad (2.9)$$

2.6 Moment statique d'une section comportant un ou plusieures orifices :

Le moment statique d'une telle section , qu'elle soit simple ou complexe , par rapport à un axe quelconque , (Δ) par exemple,peut etre déterminé , en suivant les étapes suivantes :

a) Considérer que la section étudiée est pleine (ne contient aucun orifice) et calculer son moment statique par rapport à l'axe (Δ) , soit ce moment égal à $S_{(\Delta)}^{T}$

b) Calculer le moment statique de l'aire de l'orifice (ou des orifices) par rapport à (Δ) , soit ce moment égal à $S_{(\Delta)}^{v}$,

c) Soustraire $S_{(\Delta)}^{v}$ de $S_{(\Delta)}^{T}$, le résultat représentera le moment statique de la section étudiée , par rapport à l'axe (Δ) . soit :

$$S_{(\Delta)} = S_{(\Delta)}^{T} - S_{(\Delta)}^{v} \qquad (2.10)$$

Exemple :

$$S_x = S_x^{(1)} - S_x^{(2)} + S_x^{(3)} \qquad (2.11)$$

$$S_y = S_y^{(1)} - S_y^{(2)} + S_y^{(3)} \qquad (2.12)$$

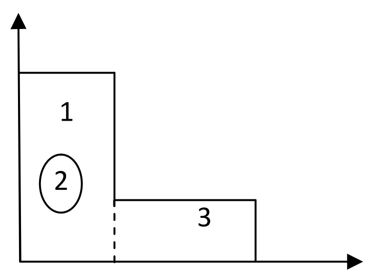

Figure 2.5

Remarque :

Les relations relatives à la détermination des coordonnées du c.d.g restent valables quelque soit la nature de la section .Ainsi, dans le cas général , on peut écrire :

$$Y_G = \frac{Sy}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_x^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad (2.13)$$

$$X_G = \frac{Sy}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_y^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad (2.14)$$

2.7 Moment d'inertie

2.7.1. Définition

On définit le moment d'inertie ou moment quadratique d'une section comme le **degré de résistance** de cette section aux efforts extérieurs appliqués, en tenant compte de la forme de cette section.

Par définition, les intégrales:

$$I_x = \int_A y^2 dA \qquad (2.15)$$

$$I_y = \int_A x^2 dA \qquad (2.16)$$

S'appellent moments d'inertie de la section ***A*** par rapport aux axes *ox* et *oy*, respectivement, conformément à la figure 2.6 Ces expressions sont déduites de la définition suivante.

Le moment d'inertie d'une surface infiniment petite par rapport à un axe éloigné de cette surface est égal au produit de son aire par le carré de la distance à l'axe. Il est toujours positif et s'exprime en m^4(cm^4, mm^4).

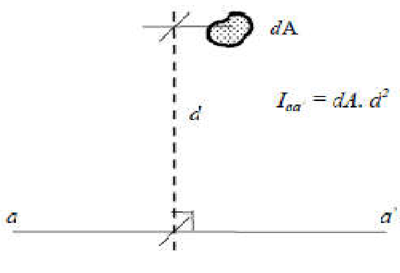

figure 2.6

L'intégrale:

$$I_{xy} = \int_A xy\,dA \qquad (2.17)$$

S'appelle moment centrifuge ou produit d'inertie de la section A par rapport au système xoy.

Remarque

Les moments quadratiques I_x et I_y sont toujours positifs, tandis que le moment produit Ixy peut être positif, négatif ou nul.

2.7.2. Moment d'inertie polaire

Le moment d'inertie polaire de la section montrée par la **figure 2.2** est donné par la relation:

$$I_P = \int_A r^2\,dA \qquad (2.18)$$

Avec

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad (2.19)$$

D'où

$$I_P = I_x + I_y \qquad (2.20)$$

Le moment d'inertie polaire est toujours positif et n'est jamais nul.

Le moment d'inertie polaire d'une section par rapport à tout point de cette section est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux axes perpendiculaires passant par ce point.

2.7.3 Variations des moments d'inertie

2.7.3.1 Translation des axes

Soit une section A, ses moments d'inertie dans le système xoy: I_x, I_y, I_{xy} sont connus. On se propose de calculer les moments d'inertie de la section A dans le système $x'o'y'$ en procédant aux translations des axes ox et oy conformément à la figure 2.7.

$$x' = x + a \quad ; \quad y' = y + b$$

$$I_{x'} = \int_A y'^2\, dA = \int_A (y+b)^2\, dA$$
$$= \int_A y^2 dA + 2b\int_A y dA + b^2 \int_A dA$$

D'où

$$I_{x'} = I_x + 2bS_x + b^2 A \quad (2.21)$$

On suit le même raisonnement pour $I_{y'}$ *et* $I_{x'y'}$

Si le point O coïncide avec le centre de gravité G, les moments statiques S_x et S_y deviennent nuls et on a:

$$I_{x'} = I_x + b^2 A \quad (2.22)$$

$$I_{y'} = I_y + a^2 A \quad (2.23)$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + abA \quad (2.24)$$

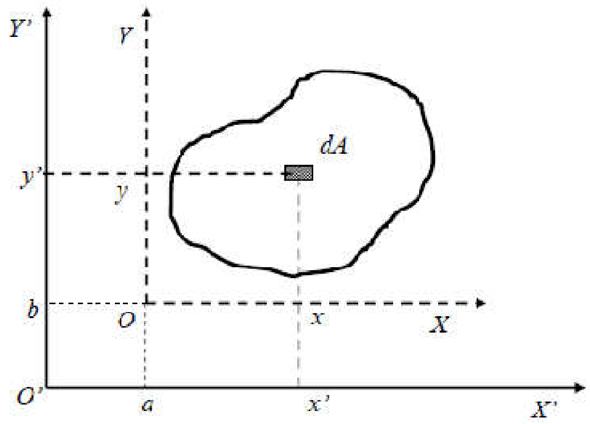

Fig. 2.7 Moment d'inertie d'une section et translation des axes.

2.7.3.2Théorème de Huygens :

Le moment d'inertie d'une section par rapport à un axe quelconque Δ est égal au moment d'inertie de la section par rapport à l'axe passant par son centre de gravité et parallèle à Δ augmenté du produit de l'aire de la section par le carré de la distance entre les deux axes.

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + d^2 A \quad (2.25)$$

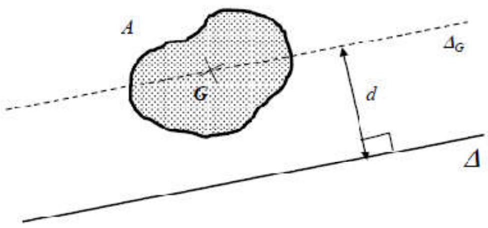

Fig. 2.8- Schématisation du théorème de Huygens.

2.8. Module de résistance

Le moment de résistance d'une section droite est le rapport entre le moment d'inertie axial et la distance la plus éloignée de cet axe.

$$W_x^{min} = \frac{I_x}{y^{max}}; \quad W_y^{min} = \frac{I_y}{x^{max}} \quad (2.26)$$

Exemple : Soit pour la figure suivante déterminer le moment de résistance minimal.

Deux cas se présentent :

- $Si\ a < b \Rightarrow W_x^{min} = I_x / b$
- $Si\ a > b \Rightarrow W_x^{min} = I_x / a$

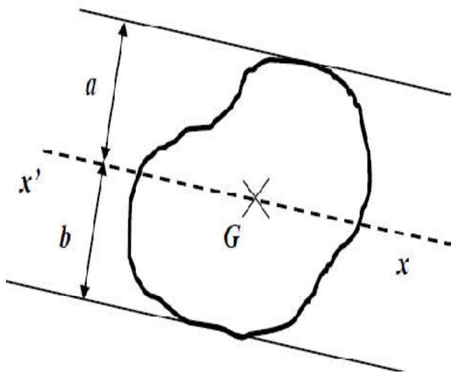

Fig. E1.8

2.9. Rayon de giration

Le rayon de giration d'une surface A selon l'axe x ou l'axe y est défini par:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad ou \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (2.27)$$