

Cours 7

Martingale et temps d'arrêt

Une martingale est caractérisée par l'égalité $\mathbb{E}(X_m | \mathcal{F}_n) = X_{m \wedge n}$. Il est naturel de se demander si cette égalité est encore valable pour deux temps d'arrêt T et S au lieu de deux constantes m et n . Le théorème d'arrêt de Doob répond à cette question sous certaines conditions.

On se donne un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ où $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition 1 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus \mathbb{F} -adapté et T un \mathbb{F} -temps d'arrêt. On note X_T l'application définie pour chaque $\omega \in \Omega$ par $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$.

Lemme 2 L'application X_T est \mathcal{F}_T -mesurable.

Preuve. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et n un entier naturel

$$\{X_T \in B\} \cap \{T = n\} = \{X_n \in B\} \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$$

qui entraîne $\{X_T \in B\} \in \mathcal{F}_T$ et donc X_T est \mathcal{F}_T -mesurable. ■

Proposition 3 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une \mathbb{F} -martingale et T un \mathbb{F} -temps d'arrêt borné par $m \in \mathbb{N}$. Alors X_T est intégrable et $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.

Preuve. Vu que $T \leq m$, alors $\{T \leq m\} = \Omega$ et donc $X_T = \sum_{k=0}^m X_k \mathbb{1}_{\{T=k\}}$ et donc

$$\mathbb{E}(|X_T|) \leq \sum_{k=0}^m \mathbb{E}(|X_k|) \mathbb{1}_{\{T=k\}} \leq \sum_{k=0}^m \mathbb{E}(|X_k|) < +\infty,$$

ce qui achève l'intégrabilité de X_T . Montrons que $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_T) &= \sum_{k=0}^m \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T=k\}} X_k) \\
&= \sum_{k=0}^m \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T=k\}} \mathbb{E}(X_m \mid \mathcal{F}_k)) \\
&= \sum_{k=0}^m \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T=k\}} X_m \mid \mathcal{F}_k)) \\
&= \sum_{k=0}^m \mathbb{E}(X_m \mathbb{1}_{\{T=k\}}) \\
&= \mathbb{E}(X_m) \\
&= \mathbb{E}(X_0).
\end{aligned}$$

■

Théorème 4 (d'arrêt de Doob : cas fini) Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une \mathbb{F} -martingale, S et T un \mathbb{F} -temps d'arrêt bornés par une constante $m \in \mathbb{N}$ et tels que $S \leq T$. Alors $\mathbb{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S) = X_S$ p.s.

Preuve. Soit A un élément de \mathcal{F}_S . On définit la variable aléatoire R comme suit

$$R = S \mathbb{1}_A + T \mathbb{1}_{A^c}.$$

Cette variable aléatoire est un \mathbb{F} -temps d'arrêt borné par m . En effet,

$$\begin{aligned}
\{R = n\} &= \{S \mathbb{1}_A = n\} \cup \{T \mathbb{1}_{A^c} = n\} \\
&= (A \cap \{S = n\}) \cup (A^c \cap \{T = n\}) \in \mathcal{F}_n
\end{aligned}$$

Car : $A \cap \{S = n\} \in \mathcal{F}_n$ par la définition de \mathcal{F}_S et $A^c \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ puisque $A^c \in \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Montrons maintenant que $\mathbb{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S) = X_S$ p.s.

Grace à la proposition précédente on a

$$\mathbb{E}(X_R) = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_T).$$

et on a aussi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_T) &= \mathbb{E}(X_T \mathbb{1}_A + X_T \mathbb{1}_{A^c}) = \mathbb{E}(X_T \mathbb{1}_A) + \mathbb{E}(X_T \mathbb{1}_{A^c}) \\
\mathbb{E}(X_R) &= \mathbb{E}(X_S \mathbb{1}_A + X_T \mathbb{1}_{A^c}) = \mathbb{E}(X_S \mathbb{1}_A) + \mathbb{E}(X_T \mathbb{1}_{A^c})
\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{E}(X_S \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_T \mathbb{1}_A)$ ce qui signifie que $\mathbb{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S) = X_S$ p.s. ■

Définition 5 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus stochastique et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de temps d'arrêt finis. La suite $(X_{T_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée un échantillonnage de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Le théorème suivant (admis) montre que si la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, alors l'échantillonnage $(X_{T_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de la martingale $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est encore une martingale sous certaines conditions.

Théorème 6 (d'échantillonnage) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une \mathbb{F} -martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale). Si $(X_{T_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est un échantillonnage de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que :

- i) $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(|X_{T_n}|) < \infty$,
 - ii) $\limsup_N \mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_{\{T_n > N\}}) = 0, n \in \mathbb{N}$,
- alors $(X_{T_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une \mathbb{F} -martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale).

Proposition 7 Sous chacune des conditions suivantes :

- 1) $\exists k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|X_n| \leq k$ p.s., $n \in \mathbb{N}$.
- 2) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k_n \in \mathbb{N}$ tel que $T_n \leq k_n$ p.s.,

les hypothèses du théorème d'échantillonnage sont vérifiées.

Preuve. 1) Supposons que la condition 1) de la proposition précédente est vérifiée. On a

$$\{|X_{T_n}| > k\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\{T_n = i\} \cap \{|X_i| > k\}) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{|X_i| > k\},$$

donc $0 \leq P(\{|X_{T_n}| > k\}) \leq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P(\{|X_i| > k\}) = 0$, ceci implique que $|X_{T_n}| \leq k$ p.s., d'où la première conditions du théorème d'échantillonnage $\mathbb{E}(|X_{T_n}|) \leq k < \infty$. On va maintenant prouver la deuxième condition. Or la suite d'événements $(\{T_n > N\})_{N \in \mathbb{N}}$ converge en décroissant vers $\{T_n = +\infty\}$ donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P\{T_n > N\} = P\left(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \{T_n > N\}\right) = P(\{T_n = +\infty\}) = 0,$$

puisque T_n est fini p.s., et $0 \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_{\{T_n > N\}}) \leq k \lim_{N \rightarrow +\infty} P\{T_n > N\} = 0$, d'où $\limsup_N \mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_{\{T_n > N\}}) = 0$, qui est la deuxième conditions du théorème d'échantillonnage.

2) Supposons maintenant que la condition 2) est vérifiée. D'abord, il suffit de remarquer que $X_{T_n} \leq \sum_{i=0}^{k_n} X_i \mathbb{1}_{\{T_n=i\}}$ et donc $|X_{T_n}| \leq \sum_{i=0}^{k_n} |X_i|$ et $\mathbb{E}(|X_{T_n}|) \leq \sum_{i=0}^{k_n} \mathbb{E}(|X_i|) < +\infty$. Et enfin, pour $N \geq k_n$ on a bien $\mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_{\{T_n > N\}}) = 0$, ce qui termine la preuve de la proposition. ■

Proposition 8 Corollaire 9 Soit T un \mathbb{F} -temps d'arrêt. Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une \mathbb{F} -martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale), alors le processus arrêté au temps T , soit $(X_{T \wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une \mathbb{F} -martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale).

Preuve. On a déjà vu que chaque variable aléatoire $T \wedge n$ est un temps d'arrêt borné par n , et comme la condition 2) de la proposition précédente est vérifiée avec $k_n = n$, le théorème d'échantillonnage donne la conclusion.

■

Cours 8.

Convergence des martingales Inégalités remarquables

Différentes inégalités remarquables sont utilisées dans l'étude des résultats de convergence de martingales. En voici quelques-unes.

Lemme 10 (première inégalité maximale de Doob) Si X est une sous-martingale et $\lambda > 0$, on a

$$\lambda P \left(\sup_{k \leq n} X_k \geq \lambda \right) \leq \mathbb{E} \left(X_n \mathbb{1}_{\{\sup_{k \leq n} X_k \geq \lambda\}} \right).$$

Preuve. On pose $A = \{\sup_{k \leq n} X_k \geq \lambda\}$, $A_0 = \{X_0 \geq \lambda\}$ et pour chaque $0 < k \leq n$, $A_k = \{X_0 < \lambda, \dots, X_{k-1} < \lambda, X_k \geq \lambda\}$. Il est facile de voir que $A_k \in \mathcal{F}_k$ et donc $\forall 0 < k \leq n$,

$$\mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{A_k}) \geq \mathbb{E}(X_k \mathbb{1}_{A_k}) \geq \lambda P(A_k).$$

et comme $A = \bigcup_{k=0}^n A_k$, on a finalement

$$\mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_A) = \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{A_k}) \geq \lambda \sum_{k=0}^n P(A_k) = \lambda P(A)$$

c'est-à-dire

$$\lambda P \left(\sup_{k \leq n} X_k \geq \lambda \right) \leq \mathbb{E} \left(X_n \mathbb{1}_{\{\sup_{k \leq n} X_k \geq \lambda\}} \right).$$

La preuve du lemme est terminée. ■

Lemme 11 (technique) Si X et Y sont deux variables aléatoires positives telles que $\forall \lambda > 0$, $\lambda P(X \geq \lambda) \leq \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_{\{X \geq \lambda\}})$. Alors $\forall p > 1$ et $q = \frac{p}{p-1}$, on a $\|X\|_p \leq q \|Y\|_p$ (i.e. $[\mathbb{E}(X^p)]^{\frac{1}{p}} \leq q [\mathbb{E}(Y^p)]^{\frac{1}{p}}$).

Preuve. Posons $G = \int_0^{+\infty} p \lambda^{p-1} P(X \geq \lambda) d\lambda$ et $D = \int_0^{+\infty} p \lambda^{p-2} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X \geq \lambda\}}) d\lambda$.

L'hypothèse $\lambda P(X \geq \lambda) \leq \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_{\{X \geq \lambda\}})$ implique que $G \leq D$. Comme

$$G = \int_0^{+\infty} p \lambda^{p-1} \left(\int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{X \geq \lambda\}} dP \right) d\lambda = \int_{\Omega} dP \int_0^X p \lambda^{p-1} d\lambda = \int_{\Omega} X^p dP$$

et

$$D = \int_0^{+\infty} p\lambda^{p-2} \left(\int_{\Omega} Y \mathbb{1}_{\{X \geq \lambda\}} dP \right) d\lambda = \int_{\Omega} Y dP \int_0^X p\lambda^{p-2} d\lambda = \int_{\Omega} Y q X^{p-1} dP$$

L'inégalité $G \leq D$ s'écrit donc $\int_{\Omega} X^p dP \leq \int_{\Omega} Y q X^{p-1} dP$. D'où

$$\mathbb{E}(X^p) \leq q \mathbb{E}(Y X^{p-1}) \leq q \|Y\|_p \|X^{p-1}\|_q = q \|Y\|_p (\mathbb{E}(X^{p-1}))^{\frac{1}{q}}.$$

Donc $(\mathbb{E}(X^p))^{1-\frac{1}{q}} \leq q \|Y\|_p$. Finalement, $\|X\|_p = (\mathbb{E}(X^p))^{\frac{1}{p}} = (\mathbb{E}(X^p))^{1-\frac{1}{q}} \leq q \|Y\|_p$. ■

Proposition 12 (Inégalité maximale de Doob dans L^p). Si X est une sous-martingale positive, pour $p > 1$, et $q = \frac{p}{p-1}$, soit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a : $\|\sup_{k \leq n} X_k\|_p \leq q \|X_n\|_p$.

Preuve. Si X est une sous-martingale et $\lambda > 0$, on a d'après la première inégalité maximale de Doob

$$\lambda P \left(\sup_{k \leq n} X_k \geq \lambda \right) \leq \mathbb{E} \left(X_n \mathbb{1}_{\{\sup_{k \leq n} X_k \geq \lambda\}} \right).$$

Posons $X = \sup_{k \leq n} X_k$ et $Y = X_n$, l'inégalité précédente s'écrit $\lambda P(X \geq \lambda) \leq \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_{\{X \geq \lambda\}})$. Le lemme technique implique alors que $\|X\|_p \leq q \|Y\|_p$, c'est-à-dire $\|\sup_{k \leq n} X_k\|_p \leq q \|X_n\|_p$ ce qui termine la preuve. ■

Théorème 13 (Inégalité de Kolmogorov) Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une \mathbb{F} -martingale de carré intégrable et $\lambda > 0$, on a pour tout $n \geq 1$:

$$P \left(\sup_{1 \leq k \leq n} |X_k| \geq \lambda \right) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(X_n^2).$$

Preuve. Il suffit de remarquer que $(X_n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une sous-martingale positive et que

$$P \left(\sup_{1 \leq k \leq n} X_k^2 \geq \lambda^2 \right) = P \left(\sup_{1 \leq k \leq n} |X_k| \geq \lambda \right)$$

on obtient donc compte tenu la première inégalité maximale de Doob

$$\begin{aligned} P \left(\sup_{1 \leq k \leq n} |X_k| \geq \lambda \right) &= P \left(\sup_{1 \leq k \leq n} X_k^2 \geq \lambda^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{E} \left(X_n^2 \mathbb{1}_{\{\sup_{k \leq n} X_k^2 \geq \lambda^2\}} \right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{E}(X_n^2). \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

Convergence des martingales

On va exposer dans la suite différents résultats de convergence de martingales

Théorème 14 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une \mathbb{F} -martingale de carré intégrable (i.e. $X_n \in L^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$). Si $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E}(X_n^2) < +\infty$, alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans L^2 et p.s. vers une variable aléatoire X de carré intégrable. De plus pour tout $n \geq 1$, on a $X_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$.

Preuve. Remarquons d'abord que $(X_n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une sous-martingale et donc la suite des réels $(\mathbb{E}(X_n^2))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par $x^* = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E}(X_n^2)$ et donc elle converge dans \mathbb{R} vers x^* . Puisque

$$\mathbb{E}[X_{n+k}X_n] = \mathbb{E}(\mathbb{E}[X_{n+k}X_n | \mathcal{F}_n]) = \mathbb{E}(X_n \mathbb{E}[X_{n+k} | \mathcal{F}_n]) = \mathbb{E}(X_n^2)$$

on a $\mathbb{E}[(X_{n+k} - X_n)^2] = \mathbb{E}[X_{n+k}^2] - \mathbb{E}[X_n^2]$, ainsi $\mathbb{E}[(X_{n+k} - X_n)^2] \leq x^* - \mathbb{E}[X_n^2]$, d'où $\sup_k \mathbb{E}[(X_{n+k} - X_n)^2]$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ce qui montre que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans L^2 et donc X_n converge dans L^2 . Soit X sa limite.

Montrons que X_n converge presque sûrement vers X . On applique l'inégalité de Kolmogorov à la martingale $(X_{m+k} - X_m)_{k \in \mathbb{N}^*}$, on obtient

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{1 \leq k \leq n} |X_{m+k} - X_m| \geq \lambda\right) &\leq \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{E}[(X_{m+k} - X_m)^2] \\ &= \frac{1}{\lambda^2} [\mathbb{E}(X_{m+k}^2) + \mathbb{E}(X_m^2)] \end{aligned}$$

et comme $\mathbb{E}(X_n^2)$ converge vers $\mathbb{E}(X^2)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $m \geq n_0$, on a

$$P\left(\sup_{1 \leq k \leq n} |X_{m+k} - X_m| \geq \lambda\right) \leq \frac{\varepsilon}{\lambda^2},$$

et par suite,

$$P\left(\sup_{k \geq 1} |X_{m+k} - X_m| \geq \lambda\right) \leq \frac{\varepsilon}{\lambda^2}.$$

Ce qui nous assure que $P(\{\omega \in \Omega : X_n \text{ diverge}\}) = 0$, et par conséquent la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement et sa limite ne peut être que X .

Il nous reste à montrer que $X_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ p.s..

On a pour toute variable aléatoire Z de carré intégrable

$$\int_{\Omega} Z X_n dP \rightarrow \int_{\Omega} Z X dP \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

En effet

$$\|ZX_n - ZX\| \leq \|Z\|^2 \|X_n - X\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

En particulier, si on prend $Z = \mathbb{1}_A$ où $A \in \mathcal{F}_n$, on arrive à

$$\int_A X_n dP \rightarrow \int_A X dP \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

et pour tout $k \geq 1$, on a

$$\int_A X_{n+k} dP = \int_A \mathbb{E}(X_{n+k} | \mathcal{F}_n) dP = \int_A X_n dP$$

d'où, on fait tendre k vers $+\infty$

$$\int_A X_n dP = \int_A X dP = \int_A \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) dP$$

Cette dernière égalité étant vraie pour tout $A \in \mathcal{F}_n$, on en déduit $X_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ $P - p.s.$ ■