

تمارين حول تكاليف الانتاج

■ **التمرين الأول:** إذا كانت التكاليف الثابتة لإحدى المؤسسات الصناعية 5000 دج، و كان تكاليفها المتغيرة كما يلي:

Q	10	20	30	40	50	60
CV	2000	3600	5000	7000	10000	18000

المطلوب: - احسب كل من التكاليف الكلية و التكاليف المتوسطة و التكاليف المتوسطة الثابتة و المتوسطة المتغيرة، و التكلفة الحدية.

- مثل بيانيا كل من التكلفة الكلية و المتغيرة و الثابتة و المتوسطة الثابتة و المتوسطة المتغيرة و التكلفة الحدية.
- ما هي التكلفة المتوسطة للمؤسسة عندما يتم إنتاج 40 وحدة.
- ما هي التكلفة المتوسطة الثابتة للمؤسسة عندما يتم إنتاج 50 وحدة.
- ما هي التكلفة المتوسطة المتغيرة للمؤسسة عندما يتم إنتاج 20 وحدة.
- ما هي التكلفة الحدية للمؤسسة للوحدة الستون (60).

■ **التمرين الثاني:** من خلال الجدول التالي الذي يمثل جدول التكاليف، اجب عن الأسئلة التي تليه:

Q	CT	CV	CF	ACF	ACV	MC
0	50	-	-	-	-	-
1	70	-	-	-	-	-
2	100	-	-	-	-	30
3	120	70	-	-	-	-
4	135	-	-	-	-	-
5	150	-	-	-	20	-
6	160	-	-	0.83	-	-
7	165	-	-	-	-	-

- 1- املأ الفراغات في الجدول السابق. اعتمادا على المعطيات المختلفة فيه.
- 2- ارسم من خلال الجدول السابق كل من منحنيات MC , ACF , ACV . موضحا العلاقة بين هذه المنحنيات.
- 3- إلى أي من الفترات الزمنية تعود هذه الأنواع من التكاليف.

■ **التمرين الثالث:** إذا كانت دالة التكاليف الكلية للإنتاج هي: $CT=Q^3-6Q^2+15Q+2$

و أخذت Q القيم من 1 إلى 6.

- عين التكلفة الثابتة.
- عين التكلفة المتوسطة الثابتة.
- عين التكلفة المتوسطة.
- عين التكلفة المتغيرة.
- عين التكلفة المتوسطة المتغيرة. أين تبلغ نهايتها العظمى.
- عين التكلفة الحدية ، أين تبلغ نهايتها العظمى.
- ماهي المرحلة التي يمر بها الإنتاج الكلي عند الحجوم $Q=2,3,4$
- مثل بيانيا هذه الدوال.

■ **التمرين الرابع:** مؤسسة تنتج سلعة معينة وفق ثلاث طرق مختلفة فإذا كانت دوال الإنتاج

$$Q_1=3 L^{1/4} K^{1/4} \quad \text{الثلاث هي:}$$

$$Q_2=2\sqrt{L} \sqrt{K}$$

$$Q_3=K L$$

أما الموارد المخصصة للإنفاق على المستخدمة من عوامل الإنتاج هي: $CT=10L+6K$

- 1- عين دالة التكاليف بدلالة الإنتاج.
 - 2- احسب دوال التكلفة المتوسطة و الحدية.
 - 3- ماهي المراحل التي يمر بها الإنتاج حسب كل دالة.
 - 4- نفرض أن حجم الميزانية المخصصة للإنتاج تقدر بـ 250 ، احسب الحجم الأمثل لعوامل الإنتاج لكي يكون المنتج رشيدا. (بالنسبة للدالة الأولى).
- **التمرين الخامس:** لدينا دالة الإنتاج هي: $Q=2K^2-4KL-5L^2$

و أسعار عوامل الإنتاج: $P_L=40, P_K=80$

- احسب قيمة التكلفة الكلية الموافقة لحجم الإنتاج $Q=2000$.
- احسب حجم الانتاج الموافق لتكلفة $CT=6000$.
- احسب التكلفة المتوسطة و الحدية بدلالة الإنتاج.

■ التمرين السادس: خصص منتج ما تكلفة كلية معطاة بالشكل التالي:

$$SCT=0.35Q^3-59.6Q^2+3420Q+4000$$

أما التكلفة الكلية في الأجل الطويل فهي: $LCT=0.25Q^3-40Q^2+2500Q$

- 1- احسب مقدار Q عندما تكون التكلفة الكلية في الفترتين متساوية. البحث على هذا المقدار يبدأ انطلاقاً من التكلفة المتوسطة و الحدية.
- 2- ارسم المنحنيات المحصل عليها، MC , ACT , CT في الفترتين القصيرة و الطويلة.

حل تمارين حول تكاليف الإنتاج

التمرين 01:

لدينا: CF=5000DA

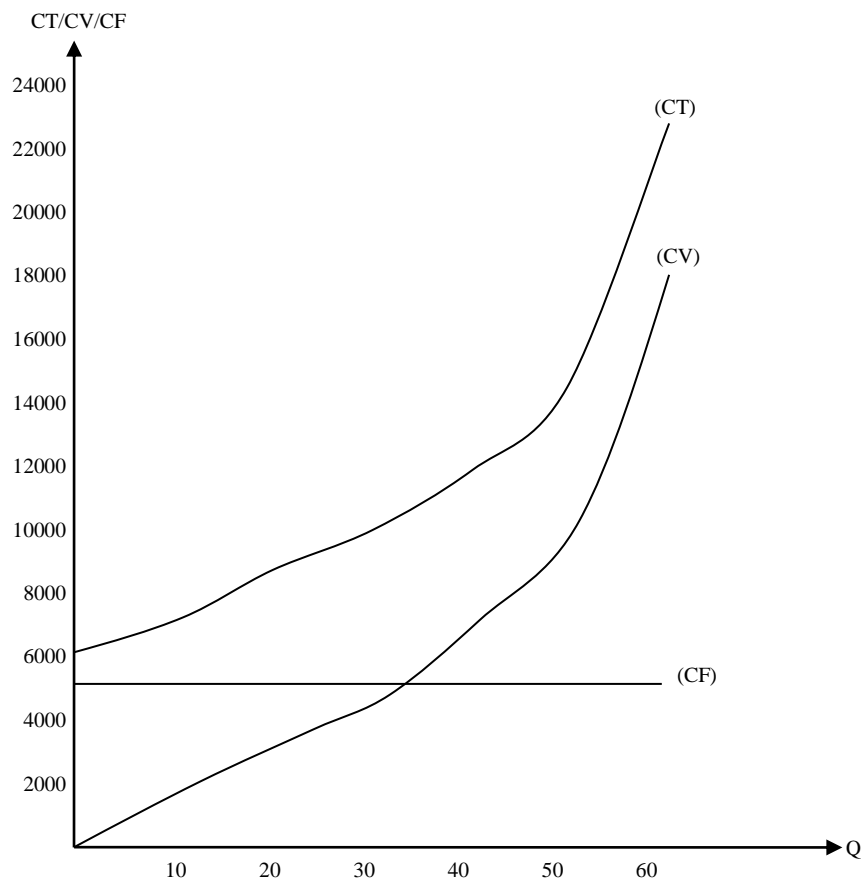
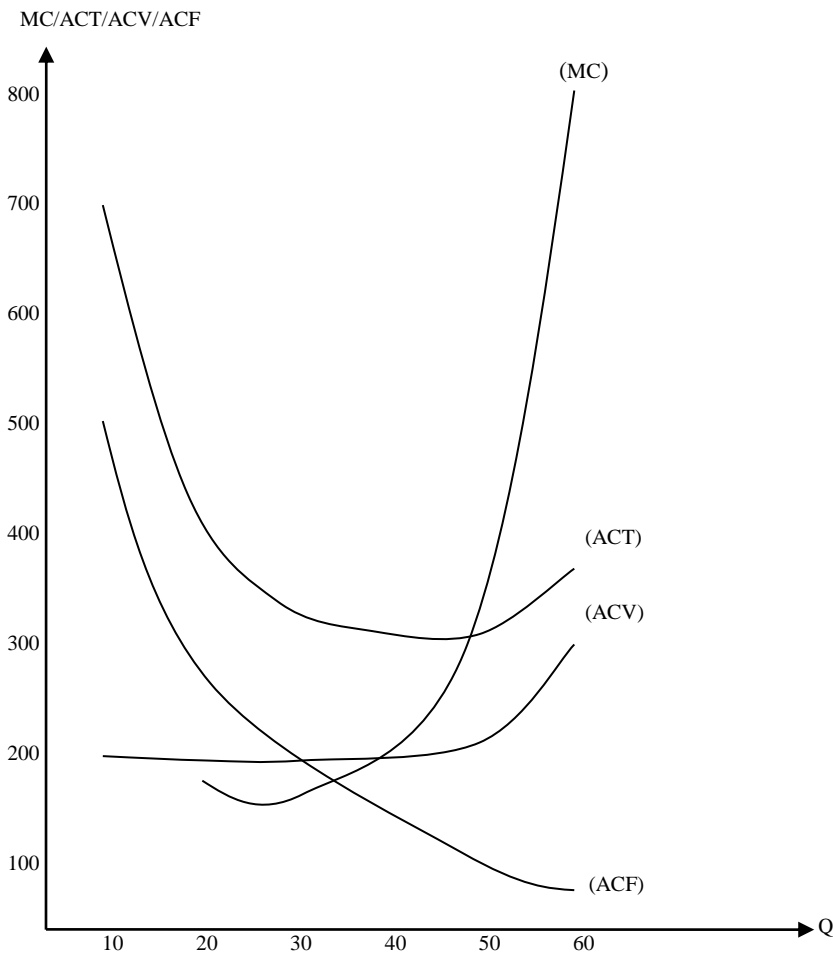
Q	10	20	30	40	50	60
CV	2000	3600	5000	7000	10000	18000
CT	7000	8600	10000	12000	15000	23000
ACT	700	430	333,3	300	300	383,3
ACV	200	180	166,6	175	200	300
ACF	500	250	166,6	125	100	83,3
MC	-	160	140	200	300	800

$$CT = CV + CF, ACT = \frac{CT}{Q}, ACV = \frac{CV}{Q}, ACF = \frac{CF}{Q},$$

$$MC = \frac{\Delta CT}{\Delta Q}$$

التمثيل البياني لكل من: MC, ACV, ACF, CF, CV, CT

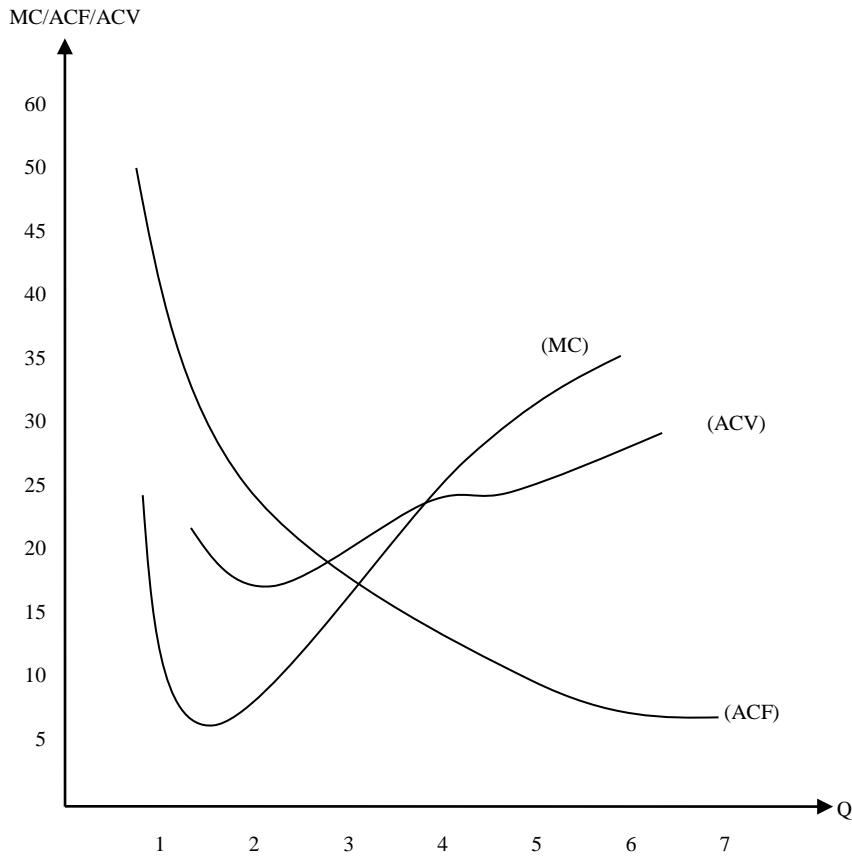
- (3) - التكلفة المتوسطة للمؤسسة عندما يبلغ الإنتاج 40 وحدة هي 300
 - التكلفة المتوسطة الثابتة للمؤسسة عند إنتاج 50 وحدة هي 100
 - التكلفة ACV عند إنتاج 20 وحدة هي 180
 - التكلفة MC عند الوحدة 60 هي 800



التمرين 02: الإجابة عن الأسئلة فيما يلي:
 (1) ملاءمات الجدول بالاعتماد على المعطيات المختلفة:

Q	CT	CV	CF	ACF	ACV	MC
0	50	0	50	-	-	-
1	70	20	50	50	20	20
2	100	50	50	25	25	30
3	120	70	50	16,6	23,3	20
4	135	85	50	12,5	21,25	15
5	150	100	50	10	20	15
6	160	110	50	8,3	18,3	10
7	165	115	50	7,14	16,42	5

(2) رسم منحنيات MC , ACF , ACV مع توضيح العلاقة بين هذه المنحنيات:
 (a) رسم المنحنيات:



توضيح العلاقة بين المنحنيات الثلاثة:

الفترة الزمنية التي تعود إليها هذه الأنواع من التكاليف هي الفترة القصيرة وهذا راجع إلى وجود CF أي التكاليف الثابتة.

التمرين 03:

* لدينا دالة التكاليف الكلية للإنتاج هي: $CT = Q^3 - 6Q^2 + 15Q + 2$

وأخذت Q القيم من 1 إلى 06.

المطلوب: تعيين كل من ACT, ACF و CT, MC, ACV, CV وهذا يتلخص في

الجدول التالي:

Q	01	02	03	04	05	06
ACF	02	01	0,66	0,5	0,4	0,33
ACT	11	08	6,66	7,5	10,4	15,3
CV	09	14	18	28	50	90
ACV	09	07	06	07	10	15
MC	-	07	4	10	22	40
CT	09	16	20	30	52	92

(a) تعيين التكلفة الثابتة: وهذا من خلال المعادلة CT أي:

$$CT = CV + CF \text{ ومنه } CT = Q^3 - 6Q^2 + 15Q + 2, CT = CV + 2$$

* تبلغ التكلفة المتوسطة المتغيرة نهايتها الدنيا:

$$ACV = 6 \rightarrow \text{أي عند } Q = 3$$

* تبلغ التكلفة الحدية نهايتها الدنيا عند $Q = 3$ أي: $MC = 4$

* المرحلة التي يمر بها الإنتاج عند:

$$Q = 2 \rightarrow CT = 16$$

$$Q = 3 \rightarrow CT = 20$$

$$Q = 4 \rightarrow CT = 30$$

* المرحلة الثالثة من الإنتاج لأن CT يتزايد

وأما Q متناقص (أي ثابت بالتقريب).

التمرين 04:

(1) تعيين دالة التكاليف بدلالة الإنتاج أي: $CT = f(Q)$

$$* \text{ باستعمال شرط التوازن } \frac{MPL}{MPK} = \frac{PL}{PK}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}L^{-3/4}.K^{1/4} \\ \frac{3}{4}L^{1/4}.K^{-3/4} \end{cases} = \frac{10}{6} \begin{cases} M_{PL} = \frac{3}{4}L^{-3/4}.K^{1/4} \\ M_{PK} = \frac{3}{4}L^{1/4}.K^{-3/4} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{L^{-3/4}.K^{1/4}}{L^{1/4}.K^{-3/4}} = \frac{10}{6} \rightarrow K = \frac{10}{6}L$$

$$K = \frac{5}{3}L$$

بالتعويض في CT نجد: $CT = 10L + 6K$

$$CT = 10\left(\frac{3}{5}\right)K + 6K \rightarrow CT = 12K$$

* بتعويض L في Q نجد:

$$Q = 3L^{3/4} \cdot \left(\frac{5}{3}L\right)^{1/4}$$

$$Q = 3L^{3/4} \left(\frac{5}{3}\right)^{1/4} \cdot L^{1/4} \rightarrow Q = 3,40L^{1/2}$$

$$Q^2 = 11,56L \rightarrow L = \frac{Q^2}{11,56}$$

$$CT = 20\left(\frac{Q^2}{11,56}\right) \rightarrow CT = 1,73Q^2$$

(2) حساب دوال التكلفة المتوسطة ACT والحدية MC

$$(a) \text{ لدينا: } ACT = \frac{CT}{Q} \rightarrow \frac{1,73Q^2}{Q}$$

$$\text{ومنه: } ACT = 1,73Q$$

(b) حساب MC: لدينا $MC = \frac{\partial CT}{\partial Q}$ ومنه:

$$MC = \frac{(1,73Q^2)'}{Q} \rightarrow MC = 2(1,73)Q$$

$$MC = 3,46Q$$

(3) تحديد المراحل التي تمر بها هذه الدالة:

$$ECT = \frac{MC}{ACT} \rightarrow \frac{3,466}{1,73Q} = 2$$

$$ECT = 2: \text{إذن}$$

ومنه غلة الحجم متناقصة لأن $ECT = 2$

(4) حساب L و K لكي يكون المنتج رشيدا:

$$Z = \max Q + \lambda(CT - L_{PL} - K_{PK})$$

$$Z = 3L^{\frac{1}{4}} \cdot K^{\frac{1}{2}} + \lambda(250 - 10L - 6K)$$

$$\begin{cases} Z'_L = 3 \left(\frac{1}{4}\right) L^{-\frac{3}{4}} \cdot K^{\frac{1}{4}} - 10\lambda = 0 \dots 1 \\ Z'_K = \frac{3}{4} L^{\frac{1}{4}} \cdot K^{-\frac{3}{4}} - 6\lambda = 0 \dots 2 \\ Z'_\lambda = 250 - 10L - 6K = 0 \dots 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{\frac{3}{4} L^{-3/4} \cdot K^{1/4}}{10} \\ \lambda = \frac{\frac{3}{4} L^{1/4} \cdot K^{-3/4}}{6} \end{cases}$$

$$\frac{\frac{3}{4} L^{-3/4} \cdot K^{1/4}}{10} = \frac{\frac{3}{4} L^{1/4} \cdot K^{-3/4}}{6} \rightarrow K = \frac{5}{3} L \dots *$$

بتعويض * في المعادلة 3 نجد: $250 - 10L - 6\left(\frac{5}{3}L\right) = 0$

$$L = \frac{250}{20} = 12,5 \quad K = 20,83, \quad L = 12,5 \text{ ومنه}$$

$$(L, K) = (12,5, 20,83)$$

التمرين 05: لدينا: $CT = 40L + 80K, Q = 2K^2 - 4KL + 5L^2$

(1) حساب CT الموافقة لـ $Q_0 = 2000$

$$L = \text{Min}CT + \lambda(Q_0 - Q) \rightarrow L$$

$$= 40L + 80K + \lambda(2000 - 2K^2 + 4KL - 5L^2)$$

$$\begin{cases} L'_L = 40 + \lambda(4K - 10L) = 0 \\ L'_K = 80 + \lambda(-4K + 4L) = 0 \\ L'_\lambda = 2000 - 2K^2 + 4KL = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{40}{4K - 10L} \\ \lambda = \frac{80}{-4K + 4L} \end{cases}$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{40}{4K - 10L} = \frac{80}{-4K + 4L}$$

$$\rightarrow 12K = 24L \rightarrow K = \frac{24}{12}$$

إذن $K = 2L$

* بتعويض (*) في 3 نجد: $2000 - 2(2L)^2 + 4L(2L) - 5(L)^2 = 0$

$$2000 - 8L^2 + 8L^2 - 5L^2 = 0 \rightarrow 2000 - 5L^2 = 0$$

$$L^2 = 400 \rightarrow L = 20, K = 40$$

* حساب CT: لدينا $CT = 40L + 80K$ بالتعويض لـ L و K نجد

$$40(20) + 80(40) = 800 + 3200 \quad CT = 4000$$

(2) حساب حجم الإنتاج الموافق لـ $CT = 6000$

$$Z = MaxQ + \lambda(CT - L_{PL} - K_{PK})$$

$$Z = 2K^2 - 4KL + 5L^2 + \lambda(6000 - 40L - 80K)$$

$$\begin{cases} Z'_L = -4K + 10L + \lambda(-40) = 0 \\ Z'_K = 4K - 4L - 80\lambda = 0 \\ Z'_\lambda = 6000 - 40L - 80K = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{4K - 4L}{80} = \frac{-4K + 10L}{40}$$

$$\rightarrow 40(4K - 4L) = 80(-4K + 10L)$$

$$\rightarrow 160K + 320K = 800L - 160L \rightarrow K = \frac{960}{480}L, K = 2L$$

بتعويض المعادلة (*) في 3 نجد:

$$6000 - 40L - 80(2L) = 0$$

$$6000 - 40L - 160L = 0 \rightarrow 6000 - 20L = 0$$

$$L = \frac{6000}{200} \rightarrow L = 30, \quad K = 2L \rightarrow K = 60$$

ومنه: $(L,K)=(30,60)$

$$Q = 2K^2 - 4KL + 5L^2: \text{حساب } Q^*$$

بتعويض L و K في المعادلة نجد: $Q = 2(60)^2 - 4(60 \times 30) + 5(30)^2$

$$Q = 4500$$

(3) حساب التكلفة المتوسطة ACT والتكلفة الحدية بدلالة الإنتاج:

(a) حساب التكلفة المتوسطة ACT

لدينا: $ACT = \frac{CT}{L}$ ففي الحالة 1 نجد $CT=4000$ أي $Q=2000$ $\rightarrow CT=4000$

أما في الحالة 2: $CT = 6000 \rightarrow Q = 4500$

$$ACT_2 = \frac{6000}{4500} = 1,33, \quad ACT_1 = \frac{4000}{2000} = 2$$

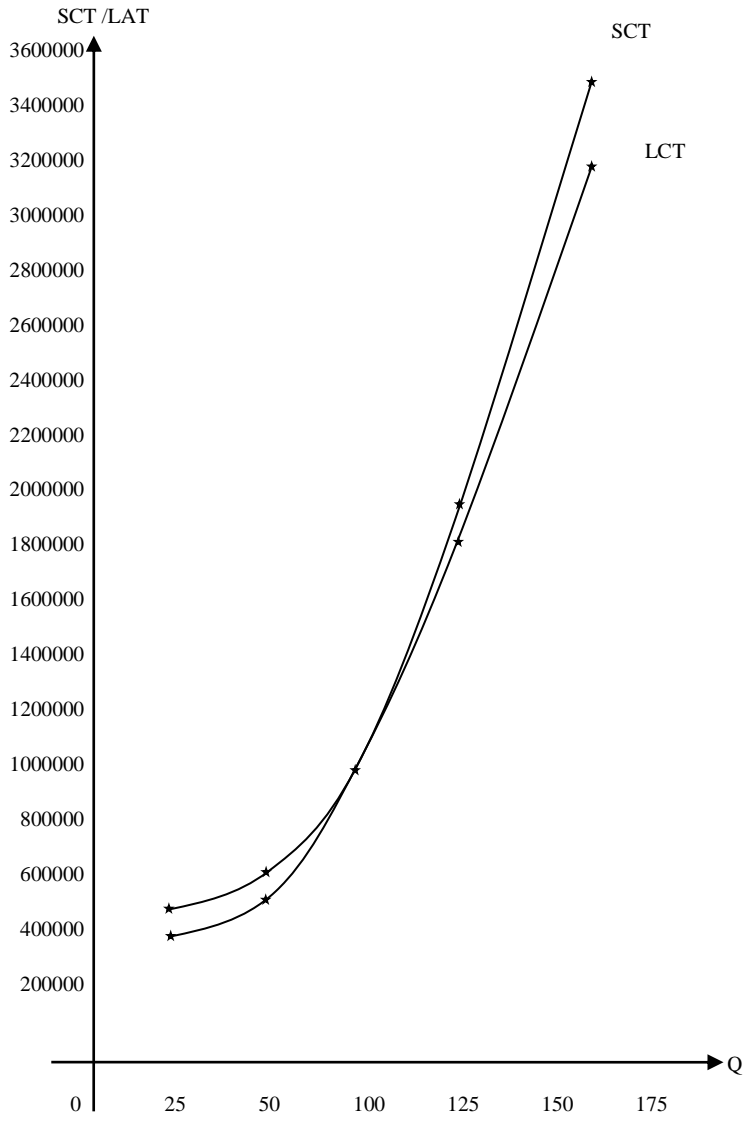
إذن $ACT_1 = 2$ و $ACT_2 = 1,33$

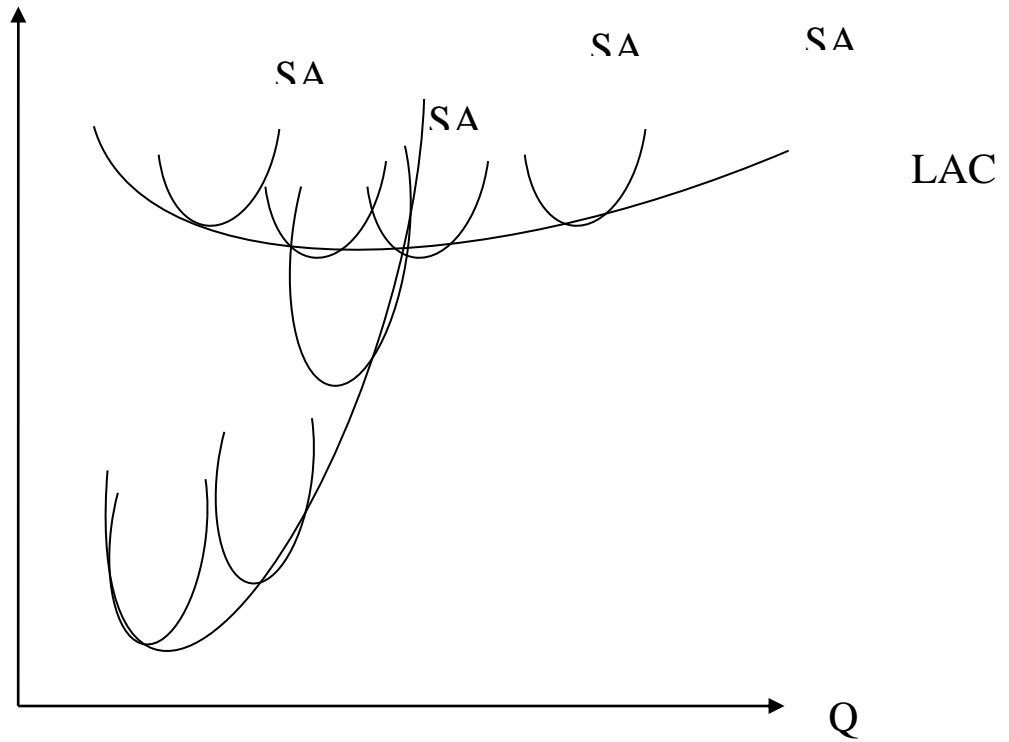
(b) حساب التكلفة الحدية: لدينا $MC = \frac{\Delta CT}{\Delta Q}$

$$Mc = \frac{6000 - 4000}{4500 - 2000} \rightarrow MC = \frac{2000}{2500} = 0,8$$

$$MC = 0,8$$

Q	25	50	100	125	150
SCT	57718,75	69750	1000000	183843,75	357250
LAT	41406,25	56250	1000000	175781,25	318750
SAC	2715,85	1395	1000	1470,75	2381,66
LAC	1652,25	1125	1000	1406,25	2125
SMC	908,75	-665	-1000	238,75	2415
LMC	1126,06	1125	5000	8906,25	14125



**التمرين 06:**

(1) حساب مقدار Q عندما تكون CT في الفترتين متساويين أي $SCT = LCT$

$$\text{لدينا: } SCT = 0,35Q^3 - 59,6Q^2 + 3420Q + 4000$$

$$LCT = 0,25Q^3 - 40Q^2 + 2500Q$$

$$Q = ? \text{ معناه } LCT = SCT \rightarrow LMC = SMC \rightarrow LAC = SAC$$

$$LMC = SMC \text{ (a)}$$

$$LMC = 1,05Q^2 - 80Q + 2500$$

$$SMC = 0,75Q^2 - 119,2Q + 3420$$

$$1,05Q^2 - 80Q + 2500 = 0,75Q^2 - 119,2Q + 3420$$

$$0,3Q^2 + 39,2Q - 920 = 0$$

$$\Delta = (39,2)^2 + 4(0,3 \times -920)$$

$$\Delta = 432,64 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 20,8$$

$$Q_1 = \frac{-39,20 + 20,8}{-0,6} = 100$$

$$Q_2 = \frac{-39,20 + 20,8}{-0,6} = 30,66$$

LAC=SAC (b)

* لما $Q_2 = 30,66$ ←

$$SCT = 0,35(30,66)^3 - 59,6(30,66)^2 + 3420(30,66) + 4000$$

$$SCT = 62873,3596$$

$$LCT = 0,25(30,66)^3 - 40(30,66)^2 + 2500(30,66)$$

$$= 46208,754$$

$LCT \neq SCT$ مرفوض إذن $62873,3596 \neq 46208,754$

$$Q_2 = 30,66$$

* لما $Q_1 = 100$,

$$SCT = 0,35(100)^3 - 59,6(100)^2 + 3420(100) + 4000$$

$$SCT = 100000$$

$$LCT = 0,25(100)^3 - 40(100)^2 + 2500(100)$$

$$LCT = 100000$$

نلاحظ أن $SCT = LCT$

إذن $Q = 100$

