1/

الفصل الثاني
الانحدار الخطي المتعدد
ملخص المحاضرة الأولى

سبق وأن تناولنا في الفصل الأول موضوع الانحدار الخطي البسيط ونقصد به العلاقة بين متغير مستقل واحد ومتغير تابع، لكن الواقع الاقتصادي يوحي في كثير من الأحيان بوجود علاقات بين أكثر من متغيرين أي بين متغير تابع ومتغيرين مستقلين على الأقل، والعرض المناسب للانحدار الخطي المتعدد يكون باستعراض الحالة الخاصة له وهي حالة العلاقة بين متغير تابع ومتغيرين مستقلين.

1. النموذج الخطي ذي ثلاث متغيرات: يمكن التعبير عن هذا النموذج بالعلاقة

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + U_i \qquad (i: 1, 2, 3 \ldots n)$$

وهدفنا في هذا النموذج هو تقدير كل من $\beta_1, \beta_2, \beta_3, U_i$.

ويمكن تحقيق ذلك بواسطة المربعات الصغرى العادية (M.C.O).

وبنفس الطريقة التي تناولنا فيها الموضوع في الانحدار الخطي البسيط يمكن القول:

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

ومنه

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = 0 \ , \quad \frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_2} = 0 \ , \quad \frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_3} = 0$$

ومنه نجد:

$$\sum Y_i = n\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum X_{3i} \ldots (1)$$

2/

$$\sum y_i x_{2i} = \hat{\beta}_1 \sum x_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum x_{2i}^2 + \hat{\beta}_3 \sum x_{2i} x_{3i} \quad \dots (2)$$

$$\sum x_{3i} y_i = \hat{\beta}_1 \sum x_{3i} + \hat{\beta}_2 \sum x_{3i} x_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum x_{3i}^2$$

ومن العلاقة (1) نجد

$$\bar{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 + \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

ومنه

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

وباعتماد اسلوب الانحرافات الذي اعتمدناه تم في الانحدار الخطي البسيط في الفصل الاول يمكننا ان نكتب:

$$\sum y_i x_{2i} = \hat{\beta}_2 \sum x_{2i}^2 + \hat{\beta}_3 \sum x_{2i} x_{3i} \quad \dots (1)$$

$$\sum y_i x_{3i} = \hat{\beta}_2 \sum x_{3i} x_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum x_{3i}^2 \quad \dots (2)$$

ومن العلاقة (1) و(2) نجد (كما تم ذلك في الفصل الاول)

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_{2i} y_i \cdot \sum x_{3i}^2 - \sum x_{3i} y_i \cdot \sum x_{2i} x_{3i}}{\sum x_{2i}^2 \cdot \sum x_{3i}^2 - \left(\sum x_{2i} x_{3i}\right)^2}$$

$$\hat{\beta}_3 = \frac{\sum x_{3i} y_i \cdot \sum x_{2i}^2 - \sum x_{2i} y_i \cdot \sum x_{2i} x_{3i}}{\sum x_{2i}^2 \cdot \sum x_{3i}^2 - \left(\sum x_{2i} x_{3i}\right)^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

3/

ب. توسيع النموذج إلى K متغير: إن توسيع النموذج إلى K متغير يتطلب الانتقال في عملية التقدير لمعالم النموذج إلى استخدام الكتابة المصفوفية وكذا العديد من النتائج في مجال جبر المصفوفات. لدينا:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \text{———} + \beta_k X_k + U$$

وإذا كان لدينا n من المشاهدات حول قيم المتغير Y وكذا X نجد:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \text{———} + \hat{\beta}_k X_{ki} + U_i$$

أي

$$Y_1 = \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \cdots + \beta_k X_{k1} + U_1$$

$$Y_2 = \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \text{———} + \beta_k X_{k2} + U_2$$

$$\vdots$$

$$Y_n = \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \text{———} + \beta_k X_{kn} + U_n$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & & & & \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

نعد الصيغة $Y_{(n \times 1)} = X_{(n \times k)} \cdot B_{(k \times 1)} + U_{(k \times 1)}$

هي كتابة المصفوفة للنموذج الخطي المتعدد والموسع لـ K متغير

حيث

Y : شعاع قيم Y في مشاهدات العينة من البعد $(n\times 1)$

B : شعاع المعاميل β من البعد $(k\times 1)$

X : مصفوفة المتغيرات المستقلة من البعد $(n\times k)$

U : شعاع حدود الاضطراب U_i من البعد $(n\times 1)$

وهدفنا الآن هو ايجاد مقدر لموجه او شعاع المعالم غير المعروفة B وعليه يجب إعادة صياغة الفرضيات الاساسية للنموذج بما يناسب النموذج الخطي العام

1. $E(U)=0$

2. $E(U.U')=\sigma^2 I_n$

3. $RANK(X)=K\leq n$

4. $U\sim N(0, \sigma_u^2 I_n)$