Corrigé type TD N° 4 : Représentation d'état

Ex N° 1

Réalisation des schémas de simulation de la représentation d'état

1°) $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$; $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + [2] u(t)$

alors $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$

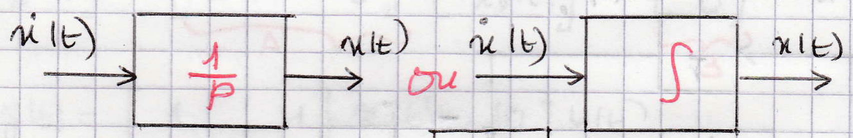
$\dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + 6x_2(t) + 5u(t)$

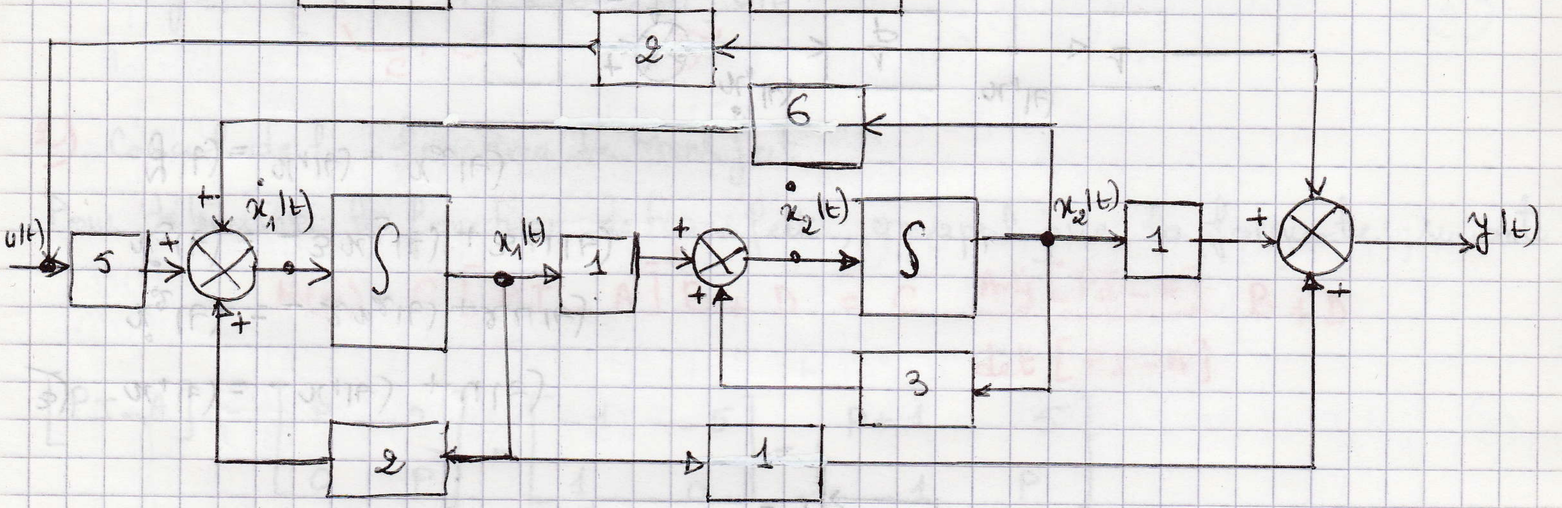
$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + 3x_2(t)$.

$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + 2u(t)$

On sait bien pour déterminer l'état à partir de la dérivée on l'intègre

Donc il faut ajouté bloc d'intégral dans le schéma (c'est-à-dire)





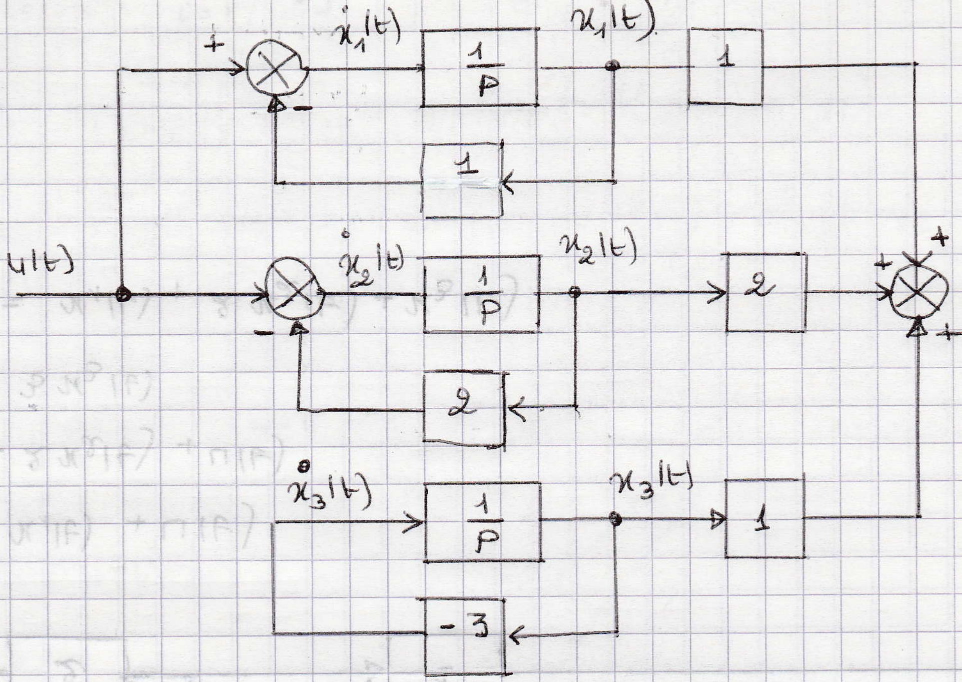
2) $\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t)$

$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + u(t)$

$\dot{x}_3(t) = -3x_3(t)$

$y(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t)$

Sample output to test PDF Combine only

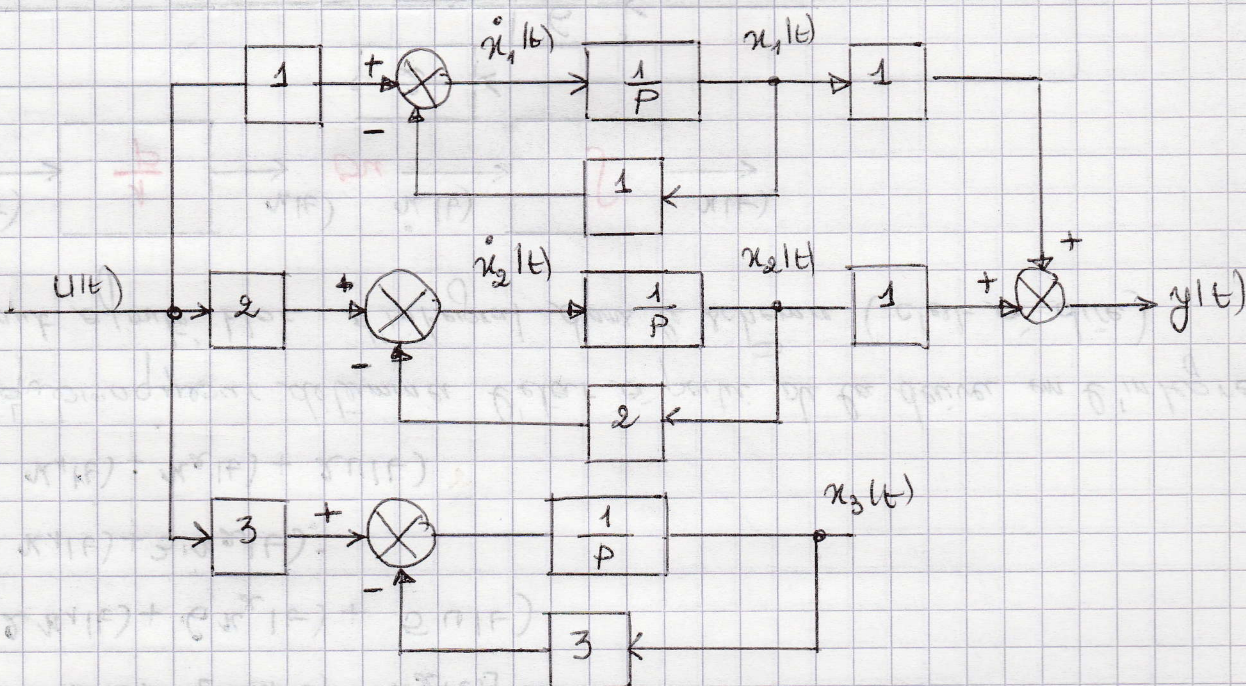


3) $\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t)$

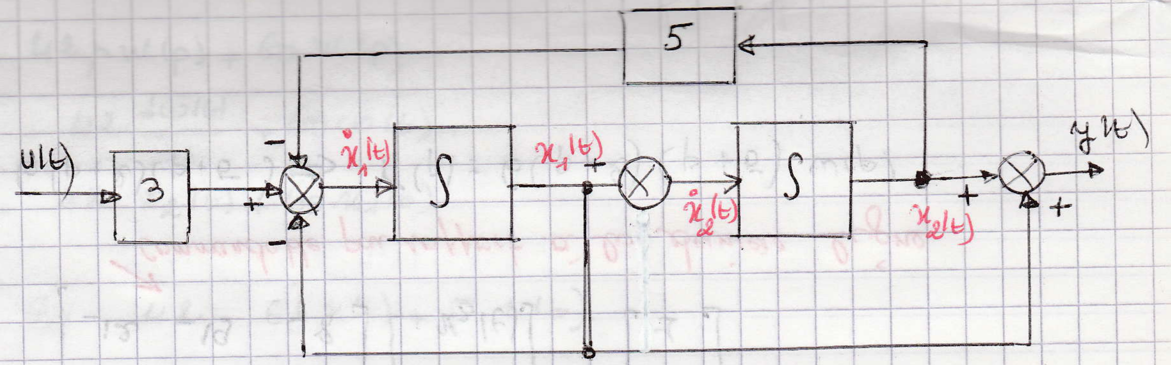
$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + 2u(t)$

$\dot{x}_3(t) = -3x_3(t) + 3u(t)$

$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$



Ex N 2 :



1) Le système dans l'espace d'état

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) - 5x_2(t) + 3u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1(t)$$
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x(t) + \underbrace{[0]}_{D} u(t)$$

2) Calcul de la fonction de transfert

Pour déterminer la fonction de transfert, on applique la formule suivante

$$H(p) = C[pI - A]^{-1}B + D = C\,\frac{Adj[pI-A]}{\det[pI-A]}\,B + D$$

$$[pI - A] = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+1 & 5 \\ -1 & p \end{bmatrix}$$

$$[pI - A]^{-1} = \frac{Adj[pI-A]}{\det[pI-A]} = \frac{\begin{bmatrix} p & -5 \\ 1 & p+1 \end{bmatrix}}{(p+1)p + 5}$$

$$C[pI-A]^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} p & -5 \\ 1 & p+1 \end{bmatrix}}{p(p+1)+5} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + 0$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} 3p \\ 3 \end{bmatrix}}{p(p+1)+5} = \frac{3p+3}{p(p+1)+5}$$

Donc $H(p) = \dfrac{3(p+1)}{p(p+1)+5}$

Ex3:

soit la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{6(p+2)(p+5)}{(p+1)(p+3)(p+4)}$$

1°) La forme Canonique commandable.

La fonction de transfert contient les pôles et les Zeros Donc on applique cette changement.

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{Y(p)}{W(p)} \times \frac{W(p)}{U(p)}$$ avec

$$\begin{cases} \frac{W(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p+1)(p+3)(p+4)} \\ \frac{Y(p)}{W(p)} = 6(p+2)(p+5) \end{cases}$$

$\frac{W(p)}{U(p)}$: Détermination de l'équation différentielle

$$\frac{W(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p+1)(p+3)(p+4)} \Rightarrow (p+1)(p+3)(p+4)W(p) = U(p) \Rightarrow$$

$$p^3 W(p) + 8p^2 W(p) + 19pW(p) + 12W(p) = U(p)$$

$$\frac{d^3\omega(t)}{dt^3} + 8\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + 19\frac{d\omega(t)}{dt} + 12\omega(t) = u(t)$$ on pose

$$x_1(t) = \omega(t);$$

$$x_2(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \dot{x}_1(t)$$

$$x_3(t) = \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} = \dot{x}_2(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = \frac{d^3\omega(t)}{dt^3} = -8\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} - 19\frac{d\omega(t)}{dt} - 12\omega(t) + u(t)$$

$$= -8x_3(t) - 19x_2(t) - 12x_1(t) + u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -19 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Commandable par rapport à la dernière ligne

$$\frac{Y(p)}{W(p)} = 6(p+2)(p+5) \Rightarrow Y(p) = 6(p+2)(p+5)W(p)$$

$$Y(p) = 6p^2 W(p) + 42p W(p) + 60 W(p)$$

$$y(t) = 6\,\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + 42\,\frac{d\omega(t)}{dt} + 60\,\omega(t).$$

$$y(t) = 6\,x_3(t) + 42\,x_2(t) + 60\,x_1(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 60 & 42 & 6 \end{bmatrix} x(t) + 0\,u(t).$$

2) La forme canonique observable :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{6(p+2)(p+5)}{(p+1)(p+3)(p+4)} = \frac{6p^2+42p+60}{p^3+8p^2+19p+12}$$

$$p^3Y(p) + 8p^2Y(p) + 19pY(p) + 12Y(p) = 6p^2U(p) + 42pU(p) + 60U(p)$$

$$p^3Y(p) = \left(-8Y(p) + 6U(p)\right)p^2 + p\left(-19Y(p) + 42U(p)\right) + \left(-12Y(p) + 60U(p)\right).$$

$$Y(p) = \frac{1}{p}\left[\left(-8Y(p)+6U(p)\right) + \frac{1}{p}\left[\left(-19Y(p)+42U(p)\right) + \frac{1}{p}\left(-12Y(p)+60U(p)\right)\right]\right]$$

$$X_3(p) = \frac{1}{p}\left(-12Y(p) + 60U(p)\right) \Rightarrow pX_3(p) = -12Y(p) + 60U(p)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_3(t) = -12\,y(t) + 60\,u(t) \quad \ldots (1)$$

$$X_2(p) = \frac{1}{p}\left[\left(-19Y(p) + 42U(p)\right) + X_3(p)\right]$$

$$pX_2(p) = +\left(-19Y(p) + 42U(p) + X_3(p)\right)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2(t) = -19\,y(t) + 42\,u(t) + x_3(t). \quad \ldots (2)$$

$$X_1(p) = \frac{1}{p}\left(-8Y(p) + 6U(p) + X_2(p)\right)$$

$$pX_1(p) = -8Y(p) + 6U(p) + X_2(p) \Rightarrow \dot{x}_1(t) = -8y(t) + 6u(t) + x_2(t) \quad \ldots (3)$$

$$Y(p) = X_1(p) \Rightarrow y(t) = x_1(t) \quad \ldots (4)$$

En remplace (4) dans (1), (2) et (3) $\Rightarrow$

$$\dot{x}_3(t) = -12\,x_1(t) + 60\,u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -19\,x_1(t) + x_3(t) + 42\,u(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = -8\,x_1(t) + 6\,u(t) + x_2(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 \\ -19 & 0 & 1 \\ -12 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 6 \\ 42 \\ 60 \end{bmatrix} u(t)\ ;\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

observable par rapport à la première colonne

3) La forme canonique De Jordan :

$$G(p) = \frac{6(p+2)(p+5)}{(p+1)(p+3)(p+4)}$$

Tous les pôles de la fonction de transfert des pôles simples.

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{k_1}{p+1} + \frac{k_2}{p+3} + \frac{k_3}{p+4}$$

$$k_1 = \lim_{p \to -1} (p+1)\,G(p) = \frac{6(-1+2)(-1+5)}{(-1+3)(-1+4)} = \frac{6(1)(4)}{2 \times 3} = \frac{24}{6} = 4$$

$$k_2 = \lim_{p \to -3} (p+3)\,G(p) = \frac{6(-3+2)(-3+5)}{(-3+1)(-3+4)} = \frac{6(-1)(2)}{(-2)(1)} = \frac{-12}{-2} = 6.$$

$$k_3 = \lim_{p \to -4} (p+4)\,G(p) = \frac{6(-4+2)(-4+5)}{(-4+1)(-4+3)} = \frac{6(-2)(1)}{(-3)(-1)} = \frac{-12}{6} = -2.$$

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{4}{p+1} + \frac{6}{p+3} + \frac{-2}{p+4}$$

$$Y(p) = \frac{4}{p+1}U(p) + \frac{6}{p+3}U(p) + \frac{-2}{p+4}U(p)$$

$$X_1(p) = \frac{4}{p+1}U(p) \Rightarrow (p+1)X_1(p) = 4U(p)$$

$$\Rightarrow pX_1(p) + X_1(p) = 4U(p)$$

$$pX_1(p) = -X_1(p) + 4U(p) \Rightarrow$$

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 4u(t) \quad (1)$$

$$X_2(p) = \frac{6}{p+3}U(p) \Rightarrow (p+3)X_2(p) = 6U(p)$$

$$\Rightarrow pX_2(p) = -3X_2(p) + 6U(p) \Rightarrow$$

$$\dot{x}_2(t) = -3x_2(t) + 6u(t) \quad (2)$$

$$X_3(p) = \frac{-2}{p+4}U(p) \Rightarrow (p+4)X_3(p) = -2U(p)$$

$$pX_3(p) + 4X_3(p) = -2U(p)$$

$$\Rightarrow pX_3(p) = -4X_3(p) - 2U(p)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_3(t) = -4x_3(t) - 2u(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Ex N° 4

1) $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t) \iff$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = u(t)$$

$x_1(t) = y(t)$; $\dot{x}_1(t) = \frac{dy(t)}{dt} = x_2(t)$;

$$\dot{x}_2(t) = u(t) - 2x_1(t) - 3x_2(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t).$$

2) Les valeurs propres (λ_1, λ_2)

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \det\left(\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+3 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda+3) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+2)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\lambda_1 = -2 \; ; \; \lambda_2 = -1}$$

3) Les vecteurs propres $(Z = (Z_1 \; Z_2)^T \; ; \; v = [v_1 \; v_2]^T)$

Vecteurs propres

$$AZ = \lambda_1 Z$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$Z_2 = -2 Z_1$$

$$-2Z_1 - 3Z_2 = -2Z_2 \Rightarrow -2Z_1 = Z_2$$

on pose $Z_1 = 1 \Rightarrow Z_2 = -2.$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T$$

$$Av = \lambda_2 v$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} v_2 = -v_1 \\ -2v_1 - 3v_2 = -v_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow -2v_1 = 2v_2 \Rightarrow v_2 = -v_1$$

on pose $v_1 = 1 \rightarrow v_2 = -1$

$v = [1 \quad -1]^T$

alors

$$T = [z \quad v] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$A = T \Delta T^{-1} =$

$$\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_i) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$e^{At} = T e^{\Delta t} T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

4)

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-t} & -e^{-2t} + e^{-t} \\ +2e^{-2t} - 2e^{-t} & +2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

5) La réponse échelon unitaire du système pour $x_0 = [1, 0]$

La solution totale est

$$x(t) = e^{At} \cdot x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B \cdot u(\tau) d\tau$$

$u(t) \rightarrow$ entrée échelon unitaire $u(t) = 1$

$$e^{At} x_0 = \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-t} & -e^{-2t} + e^{-t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$e^{A(t-\tau)} B u(\tau) = \begin{bmatrix} -e^{-2(t-\tau)} + 2e^{-(t-\tau)} & -e^{-2(t-\tau)} + e^{-(t-\tau)} \\ 2e^{-2(t-\tau)} - 2e^{-(t-\tau)} & 2e^{-2(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times 1$$

$$e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)=\begin{bmatrix} -e^{-2(t-\tau)}+e^{-(t-\tau)} \\ 2e^{-2(t-\tau)}-e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

$$\int_{t_0=0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau=\begin{bmatrix} -e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}d\tau+e^{-t}\int_0^t e^{+\tau}d\tau \\ +2e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}d\tau-e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -\frac{e^{-2t}}{2}\left[e^{2\tau}\right]_0^t+e^{-t}\left(+e^{+\tau}\right)\Big]_0^t \\ 2\frac{e^{-2t}}{2}\left[e^{2\tau}\right]_0^t-e^{-t}\left[e^{\tau}\right]_0^t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}+1-e^{-t} \\ \cancel{1}-e^{-2t}-\cancel{1}+e^{-t} \end{bmatrix}$$

Finalement

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -e^{-2t}+2e^{-t}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}-e^{-t} \\ 2e^{-2t}-2e^{-t}-e^{-2t}+e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$x(t)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-2t}-e^{-t} \end{bmatrix}$$

Ex N° 5 Devoir à la maison. (ce n'est pas obligatoire).

Sample output to test PDF Combine only