RAPPEL SUR LE CALCUL MATRICIEL

I. DEFINITIONS

Une matrice n x m est un tableau de nombres à n lignes et m colonnes. Noté par ( ) ou [ ]. Exemple de matrice avec n = 2 et m = 3

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Une matrice est symbolisée par une lettre en caractère gras. On note $\boldsymbol{M_{ij}}$ l'élément situé à l'intersection de la ligne $\boldsymbol{i}$ et de la colonne $\boldsymbol{j}$:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M_{11}} & \cdots & \boldsymbol{M_{1m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{M_{n1}} & \cdots & \boldsymbol{M_{nm}} \end{bmatrix}$$

Si $\boldsymbol{m = 1}$, la matrice est appelée vecteur (ou, vecteur-colonne) :

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M_{11}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M_{n1}} \end{bmatrix}$$

Si $\boldsymbol{n = m}$ la matrice est dite matrice carrée

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M_{11}} & \cdots & \boldsymbol{M_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{M_{n1}} & \cdots & \boldsymbol{M_{nn}} \end{bmatrix}$$

Quelques matrices carrées particulières

1. Matrice unité (ou matrice identité) :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Matrice diagonale :

$$\begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}$$

3. Matrice triangulaire (peut être supérieure ou inférieure)

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ 0 & T_{22} & T_{13} \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}$$

4. Matrice symétrique

Une matrice carrée S est dite symétrique si ***Sij = Sji :***

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & T_{22} & T_{13} \\ S_{13} & T_{13} & T_{33} \end{bmatrix}$$

II. OPERATIONS SUR LES MATRICES

1. Egalité de deux matrices

Deux matrices **A** et **B** sont égales si :

$$A_{ij} = B_{ij} \quad \forall\, i, j$$
$$n(B) = n(A) \quad , \quad m(B) = m(A)$$

2. Addition et soustraction

L'addition et la soustraction des matrices se font terme par terme.

Les matrices doivent avoir les mêmes dimensions.

Exemple

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6 & 7 & 8\\ 0 & 9 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 10 & 13\\ 2 & 13 & 4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 6 & 0\\ 7 & 9 & 8\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 5 & 7 & 9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & -6\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

3. Multiplication par un nombre

Lorsqu'une matrice est multipliée par un nombre, chaque terme de la matrice est multiplié par ce nombre :

Exemple

$$6 * \begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 5 & 7 & 9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 6 & 18\\ 12 & 24 & 36\\ 30 & 42 & 54\end{bmatrix}$$

4. Transposition

La transposée $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ d'une matrice **A** (aussi notée $\boldsymbol{A}'$) est la matrice obtenue en échangeant lignes et colonnes de **A**

$$A = \begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 2\end{bmatrix}, A^T = A' = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 2\end{bmatrix}$$

La transposée d'un vecteur-colonne est un vecteur-ligne

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A_{11}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A_{n1}}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A_{11}} & & \boldsymbol{A_{n1}}\end{bmatrix}$$

5. Multiplication matricielle

1. Produit scalaire

Le produit scalaire d'un vecteur-ligne par un vecteur-colonne y est défini par :

$$A.B = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n].\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

Le résultat de cette opération est un scalaire. On peut noter que le produit scalaire est commutatif

2. Produit matriciel

Le produit matriciel se déduit du produit scalaire : le produit de la matrice **A(n,m)** par la matrice **B(m,p)** est la matrice **C(n,p)** telle que l'élément C_{ij} est égal au produit scalaire de la ligne **i** de la matrice **A** par la colonne **j** de la matrice **B** :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} \quad \text{avec} \quad i = 1, \dots n \text{ et } j = 1, \dots p$$

Exemple

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 23 & 9 \end{bmatrix}$$

Propriétés

Le produit matriciel est

- associatif : **ABC = (AB)C = A(BC)**
- distributif par rapport à l'addition : **A(B + C) = AB + AC**
- non-commutatif : **AB≠ BA**
- La matrice unité I est l'élément neutre pour la multiplication : **AI = IA = A**
- Transposée d'une somme : $(A + B)^T = A^T + B^T$
- Transposée d'un produit : $(AB)^T = B^TA^T$

6. Inversion Une matrice carrée

A est dite inversible s'il existe une matrice carrée A^{-1} (appelée matrice inverse) telle que AA' =A'A=I

Propriétés

* $(A^{-1})^{-1} = A$

* $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$

* $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

* Si la matrice A est orthogonale, alors $A^{-1} = A^{T}$

6.1. Méthode de calcule de l'inverse d'une matrice

- On calcule le déterminant de la matrice [A] = det(A) ;

- On transpose la matrice [A]. Elle devient $[A]^{T}$;

- Pour chaque élément de la matrice $[A]^{T}$ on calcule le mineur associé. Le mineur est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne et la colonne auxquelles appartient l'élément.

- On associe à chacun de ces mineurs, 1 signe donné par $(-1)^{i+j}$; i étant le numéro de la ligne et j le numéro de la colonne de l'élément envisagé. L'ensemble (signe) x (mineur) constitue les cofacteurs de la matrice $[A]^{T}$.

- Il suffit maintenant de remplacer tous les éléments de la matrice $[A]^{T}$ par les cofacteurs (on obtient alors une matrice $[A]^{C}$) et de diviser par det(A) pour obtenir l'inverse de la matrice [A]

$$[A]^{-1} = \frac{[A]^{C}}{\det(A)}$$

```
>> A=[1 2 3;0 2 1;4 6 7]
A =
     1     2     3
     0     2     1
     4     6     7
>> det(A)
ans =
    -8

>> inv(A)
ans =
   -1.0000   -0.5000    0.5000
   -0.5000    0.6250    0.1250
    1.0000   -0.2500   -0.2500
>> A'
ans =
     1     0     4
     2     2     6
     3     1     7
>> B=[1 0 6;2 9 0;1 1 -1]
B =
     1     0     6
     2     9     0
     1     1    -1
>> A*B
ans =
     8    21     3
     5    19    -1
    23    61    17
>> A-B
ans =
     0     2    -3
    -2    -7     1
     3     5     8

>> A+B
ans =
     2     2     9
     2    11     1
     5     7     6
```