1/

ملخص المحاضرة الثانية

تقديرات المربعات الصغرى : إن تطبيق مبدأ المربعات الصغرى لتقدير مؤشرات علاقة الانحدار الخطي المتعدد في الحالة الموسعة إلى K متغير :

$$Y_i = b_1 + b_2 x_{2i} + \dots b_k x_{ki} + u_i$$

1. يتطلب هذا الامر التمهيد بعرض بعض المبادئ في جبر المصفوفات لرفع اللبس في الفهم.

- ليكن X شعاع عمودي البعد $(n\times 1)$ أي نكتب :

$$X_{n\times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- ليكن X' منقول الشعاع X وهو شعاع سطري البعد $(1\times n)$ أي نكتب :

$$X'_{1\times n} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

- فإن جداء $X'X$ يكون موجه أي عدد جبري أي نكتب :

$$X'X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

- إذا افترضنا A شعاع عمود من البعد n×1 ، نكتب

$$A_{n\times 1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

فإن

$$A'_{1\times n} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$$

ومنه

$$A'X = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

- ليكن X شعاع عمود من البعد n×1 و A مصفوفة مربعة ومتناظرة أي $A' = A$ لأن $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i \neq j$
لأنه عند تغيير الاسطر إلى اعمدة والاعمدة إلى اسطر فإن المصفوفة لا تتغير، وتبعا لذلك فإن: $X'AX$ يدعى بالشكل التربيعي للشعاع X والمصفوفة A

ملاحظة: • جداء شعاع سطر في مصفوفة يعطي شعاع سطر
• جداء مصفوفة في شعاع عمود يعطي شعاع عمود
• لا يجوز ضرب شعاع عمود بمصفوفة
• لا يجوز ضرب مصفوفة بشعاع سطر
• جداء شعاع سطر في شعاع عمود يعطي موجب

ع. الاشتقاق في جبر المصفوفات .

لدينا : $A'X = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots\cdots + a_nx_n$

وبأخذ المشتق الجزئي لـ $A'X$ بالنسبة لـ x_i حيث $i = 1, 2, \ldots n$

نجد :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A'X}{\partial x_1} &= \\ \frac{\partial A'X}{\partial x_2} &= \\ &\vdots \\ \frac{\partial A'X}{\partial x_n} &= \end{aligned} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = A_{n\times 1} \Rightarrow \frac{\partial A'X}{\partial X} = A_{n\times 1}$$

لنعتبر

$$A'X = [a_1\ a_2 \cdots a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

$$X'A = [x_1\ x_2 \cdots x_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

ومنه فإن $A'X = X'A = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$

ونستنتج مما سبق:

$$\frac{\partial A'X}{\partial X} = A$$

$$\frac{\partial A'X}{\partial A} = X$$

وباعتبار $A'X = X'A$ نجد

$$\frac{\partial X'A}{\partial X} = A$$

$$\frac{\partial X'A}{\partial A} = X$$

ملاحظة: منقول جداء مصفوفتين يساوي جداء منقولها بشرط تغيير الترتيب

$$(AB)' = B'A'$$

$$(ABC)' = C'B'A'$$

ويمكن توسيع الاشتقاق جبر المصفوفة إلى الاشتقاق الأشكال التربيعية:

ليكن الشكل التربيعي التالي

$$X'AX$$

حيث

$$X_{n\times 1}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad X'_{1\times n}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

$$A_{(n\times n)}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{n} \end{bmatrix}$$

حيث المصفوفة A كما ذكرنا سابقاً متناظرة ومربعة.

وبأخذ المشتقات الجزئية للشكل التربيعي $X'AX$ بالنسبة لعناصر الشعاع X نجد

$$\frac{\partial X'AX}{\partial X}=2AX$$

إذا اعتبرنا الأيمن من المعادلات الناتجة عن اشتقاق $X'AX$ (بالنسبة لعناصر X) كعناصر الجداء $X'A$ فإنه بإمكاننا أن نكتب:

$$\frac{\partial X'AX}{\partial X}=2X'A$$