

Chapitre II Flexion composée

1. Définition

Dans une poutre à plan sollicitée en flexion composée le système des forces appliquées à gauche d'une section S est réductible au centre de gravité G de S :

- A un effort normal N perpendiculaire au plan de S et dirigée vers la droite (effort de compression) ou vers la gauche (effort de traction),
- A un couple de moment M (moment de flexion) d'axe perpendiculaire au plan de symétrie de la section,
- A un effort tranchant V contenue dans le plan de S et dans le plan de symétrie de la section.

Les effets de effort tranchant sont étudiés indépendamment de ceux de M et de N.

Le système constitué par le moment fléchissant (M) et l'effort normal (N) peut être remplacé par une force unique équivalente à (N) et appliquée au point (C) appelé *centre de pression* distant de O d'une quantité : $e = \frac{M_0}{N}$

En flexion composée, il faut toujours préciser en quel point on effectue la réduction des forces.

Ce point sera normalement :

- Soit le centre de gravité G_0 du béton seul

$$e = \frac{M_G}{N}$$

- Soit le centre de gravité des armature tendues :

$$e_a = \frac{M_a}{N}$$

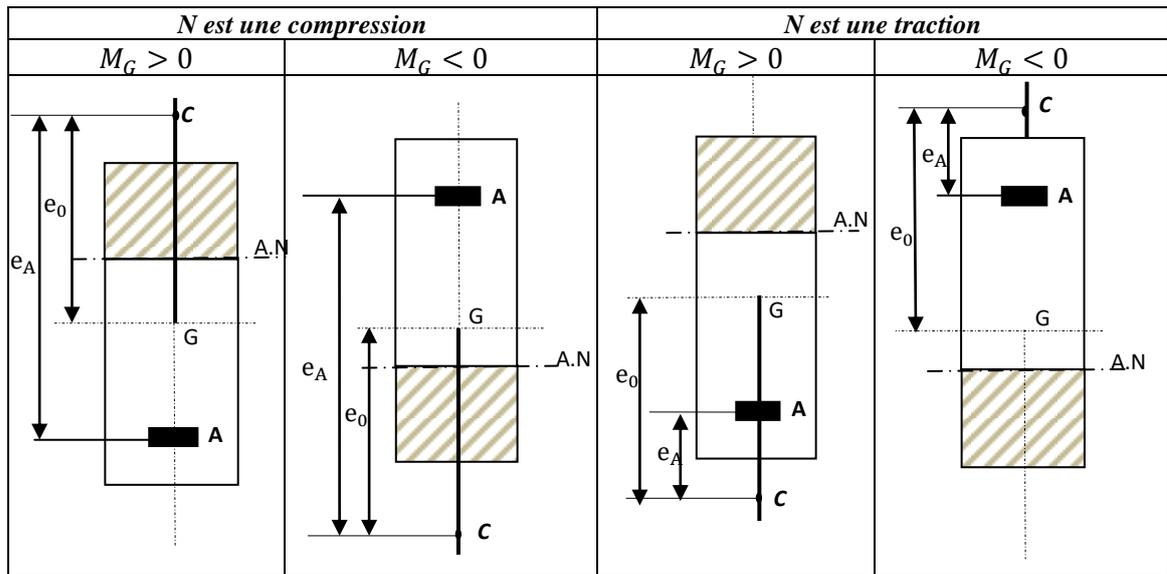
En flexion composée, la première chose à faire est de calculer e pour placer le centre de pression.

- Si (N) est un effort de compression le centre de pression (C) se trouve du côté des fibres comprimées $e_a > e_G$
- Si (N) est un effort de traction le centre de pression se trouve du côté des fibres tendues $e_a < e_G$

On peut distinguer que, suivant le signe de l'effort normal et la position du centre de pression, la section peut être :

- Entièrement tendue ,
- Partiellement comprimée ,

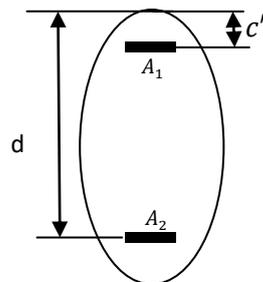
- Entièrement comprimée.



2. Flexion composée à état limite ultime de résistance

a) Section entièrement tendue

Une section sera entièrement tendue si l'effort normal N est un effort de traction et le centre de pression C se trouve entre les armatures.



Les armatures pourront être déterminées par application des formules suivantes :

$$A_1 = \frac{N e_A}{100(d - d')\sigma_{10}} \quad A_2 = \frac{N}{100\sigma_{10}} - A_1$$

b) Section partiellement comprimée

Une section sera partiellement comprimée si :

- ✓ Le centre de pression est situé à l'extérieur de la section (que l'effort normal soit un effort de traction ou de compression).

- ✓ Le centre de pression se trouve à l'intérieur de la section (proche des armatures supérieures) et l'effort appliqué est un effort de compression et la condition suivante est vérifiée:

- Pour une section rectangulaire :

$$N(d - c') - M_1 \leq (0.337 h - 0.81c')bh \times \sigma_{bc}$$

$$\text{Avec } M_1 = M_0 + \left(\frac{h}{2} - c\right)N$$

- Pour une section en T :

$$N_r(d - c') - M_r \leq (0.337 h - 0.81c')bh \times \sigma_{bc}$$

$$\text{Avec } M_r = M_1 - (b - b_0)h_0 \left(d - \frac{h_0}{2}\right) \sigma_{bc} \quad \text{et} \quad N_r = N - (b - b_0)h_0 \sigma_{bc}$$

Les armatures d'une section rectangulaire soumise à la flexion composée et partiellement comprimée pourront être calculées comme suivant :

1. Calculer la section donnée en supposant qu'elle est soumise à la flexion simple sous l'effet d'un moment fictif M_1 égale au moment par rapport aux armatures tendues,
2. Soient A_f , A'_f les armatures ainsi déterminées.
3. Les armatures A , A' de la section réelle auront pour valeurs :

$$\checkmark \quad \text{Si } N \text{ est un effort de compression } \quad A' = A'_f \quad A = A_f - \frac{N}{100\sigma_{10}}$$

$$\checkmark \quad \text{Si } N \text{ est un effort de traction } \quad A = A_f + \frac{N}{100\sigma_s} \quad A' = A'_f$$

Remarque : si on trouve $A < 0$ on prévoira pour A la valeur minimale pour que la pièce ne soit pas fragile.

c) Section entièrement comprimée

Une section sera entièrement comprimée si :

- ✓ l'effort normal N est un effort de compression et le centre de pression C se trouve entre les armatures et la condition suivante est vérifiée:

$$(0.337 - 0.81 c') b \cdot h^2 \bar{\sigma}_b < N(d - c') - M_1$$

- Si $N(d - c') - M_1 \geq (0.5h - c')b \cdot h \sigma_{bc}$

La section des armatures seront obtenues par les formules suivantes :

$$A'_1 = \frac{M_1 - (d - 0.5h)b \cdot h \sigma_{bc}}{(d - c')\sigma_2} \quad A'_2 = \frac{N_u - 100b \cdot h \sigma_{bc}}{100\sigma_2} - A'_1$$

Avec σ_2 contrainte de l'acier pour $\varepsilon_s = 2\%$

➤ Si $N(d-c')-M1 < (0.5h - c')b \cdot h \sigma_{bc}$

La section des armatures seront obtenues par les formules suivantes :

$$A'_2 = 0 \quad ; \quad A'_1 = \frac{N_u - 100\psi \cdot b \cdot h \sigma_{bc}}{100\sigma_s^1}$$

$$\text{Avec} \quad \psi = \frac{0.357 + \frac{N(d-c') - 100M1}{100b \cdot h^2 \sigma_{bc}}}{0.8571 - \frac{c'}{h}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_s^1 = 2 + \left(3.437 - 8.019 \frac{c'}{h}\right) \sqrt{1 - \psi} \quad \text{d'ou} \quad \sigma_s^1$$

Remarque :

Selon l'article (A.4.4 BAEL91), les sections soumises à un effort normal de compression sont justifiées vis-à-vis de l'état limite ultime de résistance de forme en adoptant une excentricité totale de calcul : $e_t = e_1 + e_2$

Cependant il est possible de tenir compte des effets du second ordre de façon forfaitaire lorsque :

$$\frac{L_f}{h} \leq \max\left(15, 20 \frac{e_1}{h}\right)$$

Avec : h : la longueur totale de la section du poteau dans la direction du flambement.

e_1 : excentricité (dite du premier ordre) de la résultante des contraintes normales, y compris l'excentricité additionnelle.

$$e_1 = \frac{M}{N} + e_a$$

e_a : excentricité additionnelle traduisant les imperfections géométriques des efforts appliqués.

$$e_a = \max\left(2\text{cm}, \frac{L}{250}\right)$$

e_2 : excentricité due aux effets du second ordre, liés à la déformation de la structure.

$$e_2 = \frac{3 \cdot (l_f)^2}{10^4 \cdot h} (2 + \alpha\varphi)$$

α : Le rapport du moment du premier ordre, dû aux charges permanentes et quasi-permanentes, au moment total du premier ordre, le coefficient α est compris entre 0 et 1.

➤ L'effort normal ultime est défini comme étant l'effort axial maximal que peut supporter un poteau sans subir des instabilités par flambement.

On doit vérifier que :

$$N_d \leq N_u = \alpha \left(\frac{B_r f_{c28}}{0.9\gamma_b} + A_s \frac{f_e}{\gamma_s} \right)$$

- A_s est la section d'acier comprimée prise en compte dans le calcul;

- B_r est la réduite du poteau obtenue en déduisant de sa section réelle un centième d'épaisseur sur toute sa périphérie;

- α est un coefficient fonction de l'élançement mécanique λ qui prend les valeurs :

$$\alpha = \frac{0.85}{1+0.2\left(\frac{\lambda}{35}\right)^2} \quad \text{pour } \lambda \leq 50$$

$$\alpha = 0.60 \left(\frac{50}{\lambda}\right)^2 \quad \text{pour } 50 < \lambda \leq 70$$

Si plus de la moitié des charges est appliquée avant 90 jours, alors on remplace α par $\alpha/1.10$.

l'élançement mécanique est donné par :

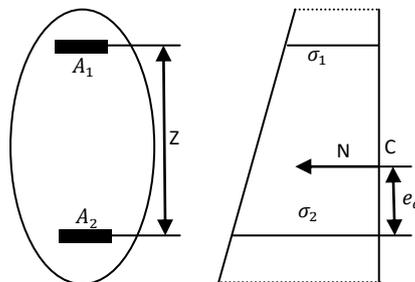
$$\lambda = 3.46 \frac{l_f}{b} \quad \text{pour les section rectangulaires}$$

$$\lambda = 4 \frac{l_f}{\phi} \quad \text{pour les sections circulaires}$$

3. Flexion composée à état limite de service

a) Section entièrement tendue

Une section sera entièrement tendue si l'effort normal N est un effort de traction et le centre de pression C se trouve entre les armatures.



On aura alors avec la notation indiquées sur la figure ci-dessus, ou e_a représente la distance du centre de pression C à l'armature inférieure :

$$\sigma_1 = \frac{N e_a}{A_1 Z} \quad \sigma_2 = \frac{N(Z - e_a)}{A_2 Z}$$

b) Section entièrement comprimée

Une section sera entièrement comprimée si :

- ✓ l'effort normal N est un effort de compression et le centre de pression C se trouve entre les armatures et la condition suivante est vérifiée :

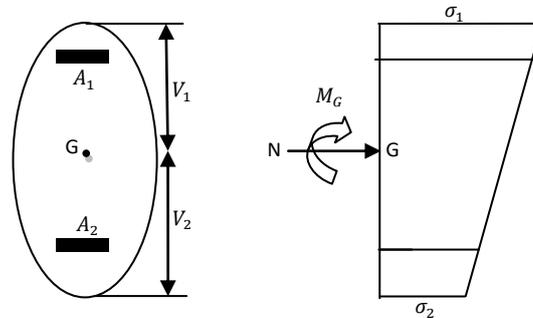
$$\frac{M_G}{N} \leq \frac{I}{B_0 V_2}$$

Avec

G : Centre de gravité de la section homogène ;

N : Effort normal de compression;

M_G : Moment par rapport au centre de gravité G



Nous avons alors :

$$\sigma_1 = \frac{N}{B_0} + \frac{M_G V_1}{I}$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{B_0} - \frac{M_G V_2}{I}$$

Avec

$$B_0 = B + n(A_1 + A_2)$$

$$I = \frac{b}{3}(V_1^3 + V_2^3) + 15[A_1(V_1 - c_1)^2 + A_2(V_2 - c_2)^2]$$

$$v_1 = \frac{1}{B_0} \left[\frac{bh^2}{2} + 15(A_1 c_1 + A_2 - d) \right] \quad \text{et} \quad v_2 = h - v_1$$

c) Section partiellement comprimée

Une section sera partiellement comprimée si :

- ✓ le centre de pression est situé à l'extérieur de la section (que l'effort normal soit un effort de traction ou de compression).
- ✓ Le centre de pression se trouve à l'intérieur de la section (proche des armatures supérieures) et l'effort appliqué est un effort de compression on a :

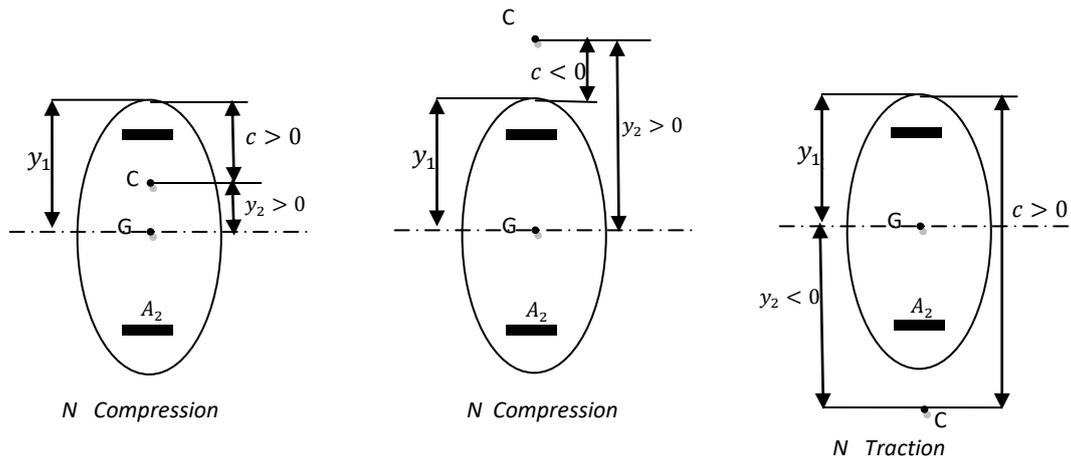
$$\frac{M_G}{N} \geq \frac{I}{B_0 V_2}$$

Avec

G : Centre de gravité de la section homogène ;

N : Effort normal de compression;

M_G : Moment par rapport au centre de gravité G.



- **Si N est un effort de compression**

D'après les figures ci-dessus, on a $0 < y_1 = y_2 + c < h$

y_2 sera obtenu par résolution de l'équation suivante : $y_1^3 + py_2 + q = 0$
Avec

$$p = -3c^2 - \frac{90A'}{b}(c - c') + \frac{90A}{b}(d - c)$$

$$q = -2c^3 - \frac{90A'}{b}(c - c')^2 - \frac{90A}{b}(d - c)^2$$

$$S = \frac{by_1^2}{2} + 15(A'(y_1 - c') - A(d - y_1))$$

Les contraintes seront déterminées par les équations suivantes :

$$\sigma_b = \frac{N}{S}y_1$$

$$\sigma'_s = 15\frac{N}{S}(y_1 - c')$$

$$\sigma_s = 15\frac{N}{S}(d - y_1)$$

- **Si N est un effort de traction** : nous avons la valeur négative pour y_2 et N , par suite on calcul la valeur y_2 et en déterminera les valeurs de $K, S, \sigma_b, \sigma_s, \sigma'_s$.