1

التمرين 5 من السلسلة رقم -2-

لدينا : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

1

* تبيان أن : $\lim_{n \to \infty} I_n = 0$.

لدينا : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ • بما أن : $x \in [0,1]$

إذن :

$$\forall x \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{x^n}{x+1} \leq x^n$$

إذن بإدخال التكامل على الأطراف

نجد :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n \, dx}{1+x} \leq \int_0^1 x^n \, dx ;$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} ,$$

إذن نجد أن :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1} ,$$

بإدخال النهاية على الأطراف نجد :

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0 .$$

2

إذن :

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq 0$$

وبالتالي :

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} I_n = 0$$

• حساب : $I_n + I_{n+1} = ?$.

لدينا : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ إذن : $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$

وبالتالي :

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^n}{1+x} + \frac{x^{n+1}}{1+x} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n \cancel{(1+x)}}{\cancel{(1+x)}} dx$$

$$= \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} .$$

إذن :

$$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

3/

② إيجاد النهاية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$

نضع :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k}.$$

نقصد بـ $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k}$ مجموع العبارة $(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k}$.

من $k=1$ إلى $k=n$ معناه:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k}=\frac{(-1)^{1+1}}{1}\boxed{+}\frac{(-1)^{2+1}}{2}\boxed{+}\frac{(-1)^{3+1}}{3}\boxed{+}\dots\boxed{+}\frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

لحساب S_n نستعمل السؤال السابق الذي يساعدنا في معرفة عبارة $\frac{1}{k}$ معناه:

من السؤال السابق لدينا: $\frac{1}{n+1}=I_n+I_{n+1}$

إذن: $\frac{1}{n}=I_{n-1}+I_n$ ومنه $\xleftarrow[k \text{ بـ } n]{\text{باستبدال}}$ $\frac{1}{k}=I_{k-1}+I_k$

وبالتالي:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(I_{k-1}-I_k\right).$$

نعوض بقيم k من 1 إلى n ،

$$=(-1)^{1+1}\left(I_0+I_1\right)+(-1)^{2+1}\left(I_1+I_2\right)+\dots+(-1)^{n+1}\left(I_{n+1}+I_n\right).$$

$$=(-1)^{2}\left(I_0+I_1\right)+(-1)^{3}\left(I_1+I_2\right)+\dots+(-1)^{n+1}\left(I_{n+1}+I_n\right).$$

إذن نتحصل على المجموع التالي:

$$S_n = (I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) - (I_3 + I_4) + \cdots \pm (I_{n-1} - I_n).$$

نلاحظ أنه يمكن اختصار الحدود المتشابهة

إذن نجد:

$$S_n = I_0 \pm I_n$$

نقوم بإدخال النهاية على الطرفين

نجد:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (I_0 \pm I_n).$$

$$= I_0 \pm \lim_{n \to \infty} (I_n).$$

لقد بينا في السؤال الأول من التمرين أن $\lim_{n \to \infty} (I_n) = 0$،

إذن:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = I_0$$

وبالتالي،

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) = I_0$$

حساب I_0 :

لدينا ; $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$ إذن :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x^0}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

بوضع ; $y = 1+x \Leftarrow dy = dx$

وكذلك من أجل $x=0 \Leftarrow y=1$

$x=1 \Leftarrow y=2$

وبالتالي نتحصل على ما يلي :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{y}\cdot dy$$

$$= \Big[\ln|y|\Big]_1^2$$

$$= \ln(2) - \cancel{\ln(1)}^{0} = \ln(2).$$

إذن : $I_0 = \ln(2)$

وبالتالي :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) = \ln(2).$$