

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

1. Introduction:

* Les fonctions de réponse, dont les interrelations ont été examinées dans le chapitre précédent, représentent une approche pour décrire le comportement anélastique. Nous passons maintenant à une description alternative en termes d'un ensemble de paramètres qui peuvent être considérés comme des attributs intrinsèques du matériau.

* Le point de départ de cette approche est une relation contrainte-déformation se présentant sous la forme d'une équation différentielle linéaire faisant intervenir la contrainte, la déformation et leurs dérivées dans le temps.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

1. Introduction:

* Le fait que la réponse d'un solide anélastique puisse être décrite par une telle équation peut être déduit de la définition de l'anélasticité, qui inclut à la fois les caractéristiques de la linéarité et du comportement contrainte-déformation dépendante.

* Puisque chacune des fonctions de réponse est maintenant reconnue comme solution de la même équation différentielle, pour différentes conditions de contrainte ou de contrainte imposées, il est immédiatement évident que les fonctions de réponse doivent être reliées.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

1. Introduction:

- * La visualisation du comportement d'un matériau régi par une équation de contrainte-déformation différentielle particulière est grandement facilitée par l'inspection d'un modèle mécanique approprié.
- * On trouvera que l'équation différentielle contrainte-déformation la plus simple capable de représenter une élasticité implique trois paramètres indépendants.
- * De manière correspondante, le modèle équivalent est constitué de trois éléments de base (deux ressorts et un amortisseur).

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

1. Introduction:

- * Le comportement correspondant à la l'équation ou le modèle à trois paramètres est d'une importance fondamentale, telle matériau présentant ce comportement est appelé « solide anélastique standard ».
- * Une partie importante de ce chapitre est consacrée à l'examen du comportement détaillé d'un tel solide.
- * Comme la définition de l'élasticité implique l'exigence de linéarité, il s'ensuit que toutes les équations différentielles contrainte-déformation de l'élasticité doivent être du premier degré.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. Equations différentielles « déformations - contraintes » et construction de modèles:

* En outre, toute équation de ce type doit contenir autant ou aussi peu de constantes indépendantes que nécessaire pour décrire le comportement anélastique d'un solide particulier.

* L'équation linéaire la plus générale à coefficients constants a la forme:

$$\mathbf{a}_0\sigma + \mathbf{a}_1\sigma' + \mathbf{a}_2\sigma'' + \mathbf{a}_3\sigma''' + \dots = \mathbf{b}_0\varepsilon + \mathbf{b}_1\varepsilon' + \mathbf{b}_2\varepsilon'' + \mathbf{b}_3\varepsilon''' + \dots$$

Pour des raisons de précision, une équation de ce type sera appelée équation différentielle contrainte-déformation.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. Equations différentielles « déformations - contraintes » et construction de modèles:

* Nous procédons à l'examen des cas d'équation précédente dans lequel tous les coefficients a et b , sauf quelques-uns, sont nuls. On constate que les modèles mécaniques constituent un moyen utile de visualiser le comportement anélastique des matériaux, et que chaque modèle correspond à une équation de différentielle « contrainte-déformation » unique.

* Pour être considéré comme un modèle pour un matériau anélastique donné, un système mécanique doit obéir aux mêmes relations entre la force, le déplacement et le temps que celles valables entre contrainte, déformation et temps, respectivement, dans le corps anélastique.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. Equations différentielles « déformations - contraintes » et construction de modèles:

* Dans le cas le plus simple de l'équation précédente, où seuls les coefficients a_0 et b_0 ne sont pas nuls, nous avons l'exemple d'un corps élastique idéal « Modèle de Maxwell ». Ici, le modèle mécanique approprié est un ressort de Hook.

* La force exercée sur le ressort représente la contrainte, le déplacement représente la déformation et la constante du ressort k représente le module approprié.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. Equations différentielles « déformations - contraintes » et construction de modèles:

- * Un tel ressort a pour caractéristique que l'énergie y est stockée de manière réversible et qu'elle revient à un déplacement nul lorsque la force qu'il exerce est supprimée.
- * Un ou plusieurs ressorts constituent donc une partie essentielle des modèles mécaniques du comportement anélastique.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. Equations différentielles « déformations - contraintes » et construction de modèles:

* Le second élément, nécessaire au frottement interne, est le dissipateur newtonien, représenté par un piston se déplaçant dans un liquide idéalement visqueux.

* Un tel point d'inflexion a la propriété que sa vitesse de déplacement est proportionnelle à la force appliquée; par conséquent, le travail effectué est entièrement dissipé sous forme de chaleur.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. Equations différentielles « déformations - contraintes » et construction de modèles:

* En termes de contrainte et de déformation, qui seront désormais utilisés à la place de la force et du déplacement, on a « $\sigma = \eta \cdot \dot{\epsilon}$ » où « η » est la viscosité du dissipateur.

* Un dissipateur représente à lui seul un liquide visqueux (newtonien); il n'est utile que pour la description des solides lorsqu'il est utilisé en combinaison avec des ressorts.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. Equations différentielles « déformations - contraintes » et construction de modèles:

* Pour former des modèles, les éléments mécaniques peuvent être combinés soit en série ou en parallèle. Dans une combinaison en série de deux éléments, 1 et 2, les contraintes σ_1 et σ_2 sont égales alors que les déformations ε_1 et ε_2 sont additives.

* La contrainte et la déformation totale pour une combinaison en série:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \text{ et } \sigma = \sigma_1 = \sigma_2$$

* De même, pour une combinaison parallèle des mêmes éléments:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \text{ et } \sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. Equations différentielles « déformations - contraintes » et construction de modèles:

* En utilisant ces règles, il est facile de voir que deux ressorts en série ou en parallèle correspondent à un autre ressort, tandis que deux dissipateurs en série ou en parallèle correspondent à un autre dissipateur. De telles combinaisons sont donc superflues et sera inutile de les employer.

* Nous sommes alors conduits à ce qui suit en tant que les deux modèles les plus simples combinant plusieurs éléments:

- 1) Un ressort et dissipateur en parallèle, appelé modèle Voigt (ou Kelvin).
- 2) Un ressort et dissipateur en série, appelé modèle Maxwell.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

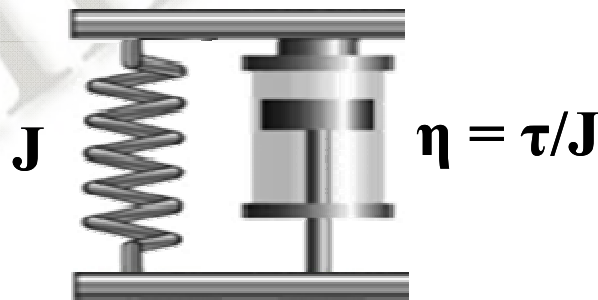
II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. Equations différentielles « déformations - contraintes » et construction de modèles:

* La description quantitatif du « ressort retardé » nécessite la dérivation puis la résolutions de l'équation différentielle « contrainte-déformation ».

* Pour le modèle de Voigt-Kelvin l'équation est obtenue comme suite:

$$\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'$$



$$\text{Avec: } \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2'$$

Figure 1. Le modèle de Voigt-Kelvin.

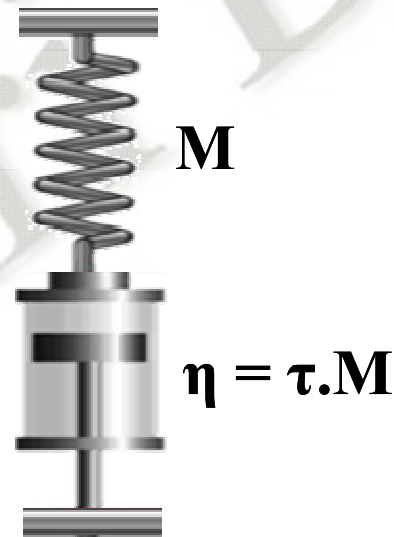
Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. Equations différentielles « déformations - contraintes » et construction de modèles:

* Pour le modèle de Maxwell l'équation est obtenue comme suite:

$$\tau \cdot M \cdot \varepsilon' = \sigma + \tau \cdot \sigma'$$



Avec: $\varepsilon_1 = J \cdot \sigma_1$, $\varepsilon_2' = J \cdot \sigma_2 / \tau$

Figure 2. Le modèle de Maxwell.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. Equations différentielles « déformations - contraintes » et construction de modèles:

* Le modèle Voigt-Kelvin manque d'élastique instantanée caractéristique des cristaux, cela peut être obtenue en fixant un ressort en série avec l'unité de Voigt-Kelvin.

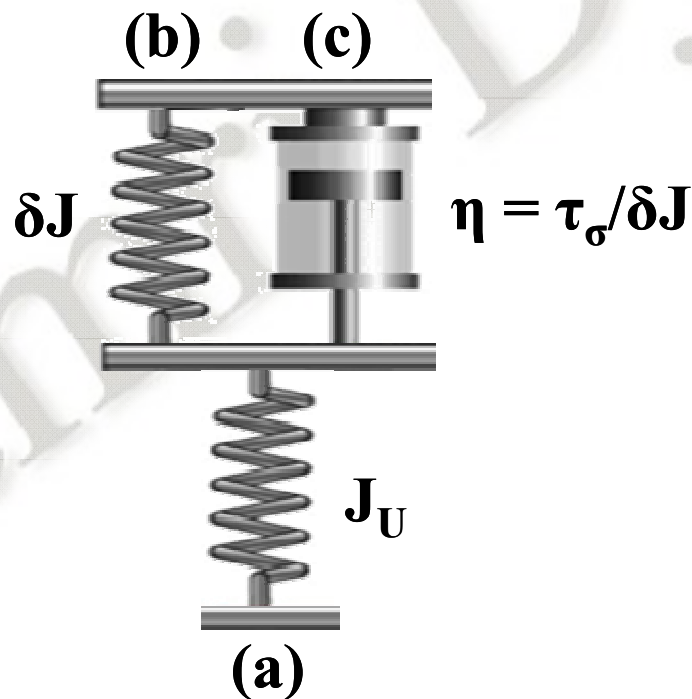


Figure 3. Le modèle à trois paramètres contenant l'unité de Voigt-Kelvin.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. Equations différentielles « déformations - contraintes » et construction de modèles:

- * Lors de l'application d'une contrainte « σ » à « $t = 0$ », le ressort **(a)** se déforme immédiatement, tandis que l'unité de « Voigt-Kelvin » reste non déformée.
- * Après un certain temps, le dissipateur **(c)** cède jusqu'à ce que le stress sur l'unité de « Voigt-Kelvin » soit entièrement transféré au ressort **(b)** et que le stress « σ » sur le dissipateur disparaisse.
- * À ce stade, il n'y aura plus de changement dans le système avec le temps.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. Equations différentielles « déformations - contraintes » et construction de modèles:

* Ce comportement de fluage présente toutes les caractéristiques d'un matériau anélastique, dans lequel la déformation par unité de contrainte de l'élément (**a**) passe d'une valeur instantanée « \mathbf{J}_U » à une valeur finale « \mathbf{J}_R ».

* A partir de ce modèle, la complaisance de l'élément (**a**) doit être « \mathbf{J}_U » et la complaisance combinée des éléments (**a**) et (**b**) doivent être « \mathbf{J}_R » avec la différence de complaisance « $\delta\mathbf{J} = \mathbf{J}_R - \mathbf{J}_U$ ».

* Enfin, la viscosité η du dissipateur à une constante de temps divisée par la complaisance du ressort parallèle.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. Equations différentielles « déformations - contraintes » et construction de modèles:

* L'équation différentielle « contrainte-déformation » du modèle à trois paramètres contenant l'unité de Voigt-Kelvin est de la forme:

$$\mathbf{J}_R \cdot \boldsymbol{\sigma} + \tau_\sigma \cdot \mathbf{J}_U \cdot \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\varepsilon} + \tau_\sigma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'$$

$$\text{Avec: } \boldsymbol{\varepsilon}_a = \mathbf{J}_U \cdot \boldsymbol{\sigma}_a, \boldsymbol{\varepsilon}_b = \delta \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\sigma}_b, \boldsymbol{\varepsilon}_c' = \boldsymbol{\sigma}_c \cdot \delta \mathbf{J} / \tau_\sigma$$

* Ce modèle représente le « Solide anélastique standard » (ce modèle n'est pas une représentation unique).

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. Equations différentielles « déformations - contraintes » et construction de modèles:

* On peut s'attendre à ce que tout modèle plus complexe que le modèle actuel à trois paramètres entraîne l'introduction de dérivées temporelles plus élevées dans l'équation différentielle de « contrainte-déformation ».

* La résolution de l'équation précédente peut donner les différentes fonctions de réponses ou la solution est de la forme:

$$y + \tau.y' = C \text{ (C: constante et } y: \text{ fonction de } \varepsilon \text{ ou } \sigma)$$

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 1. Fonction de fluage normalisée (modèle à trois paramètres):

Pour « $t > 0$ » on a $\sigma = \sigma_0$, $\sigma' = 0$, $\varepsilon(t = 0) = J_U \cdot \sigma$.

$$y(t) = J(t) = \varepsilon(t)/\sigma_0 = C + A \cdot \exp(-t/\tau_\sigma)$$

A: Constante d'intégration ($A = -\delta J$).

C: Valeur finale de la complaisance « J_R »

τ_σ : Temps de relaxation à contrainte constante.

Cette solution correspond à la formule suivante:

$$J(t) = \varepsilon(t)/\sigma_0 = J_R - (J_R - J_U) \cdot \exp(-t/\tau_\sigma) = J_U + \delta J \cdot [1 - \exp(-t/\tau_\sigma)]$$

Où la fonction de fluage normalisée $\psi(t)$ (chapitre I) est:

$$\psi(t) = [1 - \exp(-t/\tau_\sigma)]$$

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 1. Fonction de fluage normalisée (modèle à trois paramètres):

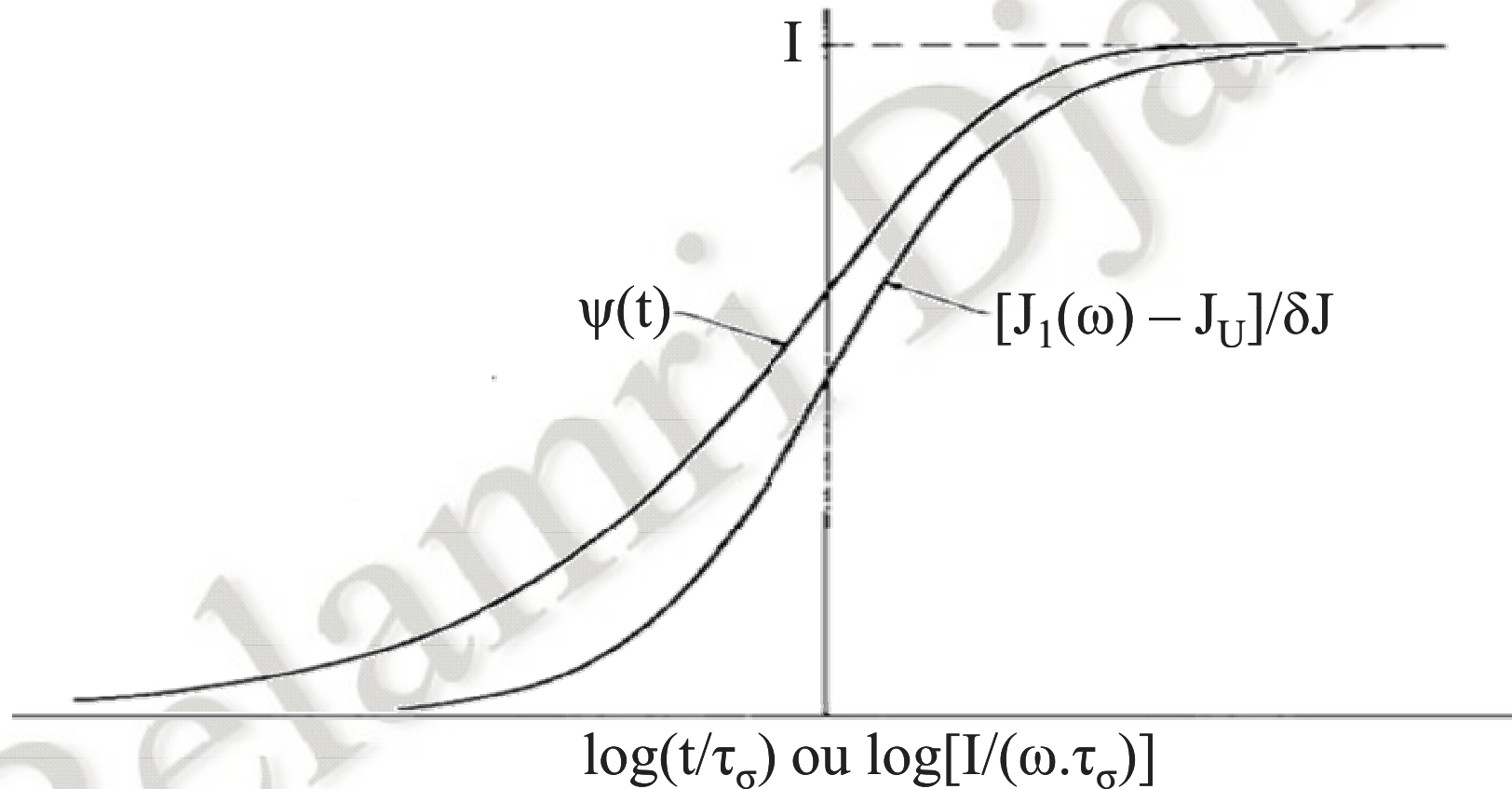


Figure 4. Fonctions de fluage $\psi(t)$ et de $J_1(\omega)$ pour un solide anélastique standard

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 2. Fonction de contrainte relaxée normalisée (modèle à trois paramètres):

De la même manière, pour « $t > 0$ » on a $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\varepsilon' = 0$, $\sigma(t = 0) = M_U \cdot \varepsilon$.

$$y(t) = M(t) = \sigma(t)/\varepsilon_0 = C + A \cdot \exp(-t/\tau_\varepsilon)$$

$$M(t) = \sigma(t)/\varepsilon_0 = M_R + (M_U - M_R) \cdot \exp(-t/\tau_\varepsilon) = M_R + \delta M \cdot [\exp(-t/\tau_\varepsilon)]$$

A: Constante d'intégration ($A = -\delta M$).

C: Valeur finale du module de Young « M_R »

τ_ε : Temps de relaxation à déformation constante

$$\ll \tau_\varepsilon = \tau_\sigma \cdot (J_U/J_R) = \tau_\sigma \cdot (M_R/M_U) = \tau_\sigma \cdot (1 + \Delta) \gg$$

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 2. Fonction de contrainte relaxée normalisée (modèle à trois paramètres):

* La description du comportement de relaxation des contraintes avec le modèle de la Figure 3. n'est pas aussi directe que celle du comportement de fluage, car il n'existe aucun élément identifié avec la relaxation du module. En conséquence, il est intéressant d'envisager un autre modèle à trois paramètres qui convient parfaitement à l'expérience de relaxation de contrainte.

* Ce modèle, illustré dans la Figure 4. est composé d'une unité de Maxwell (définie comme un ressort et un dissipateur en série) placée en parallèle avec un ressort.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 2. Fonction de contrainte relaxée normalisée (modèle à trois paramètres):

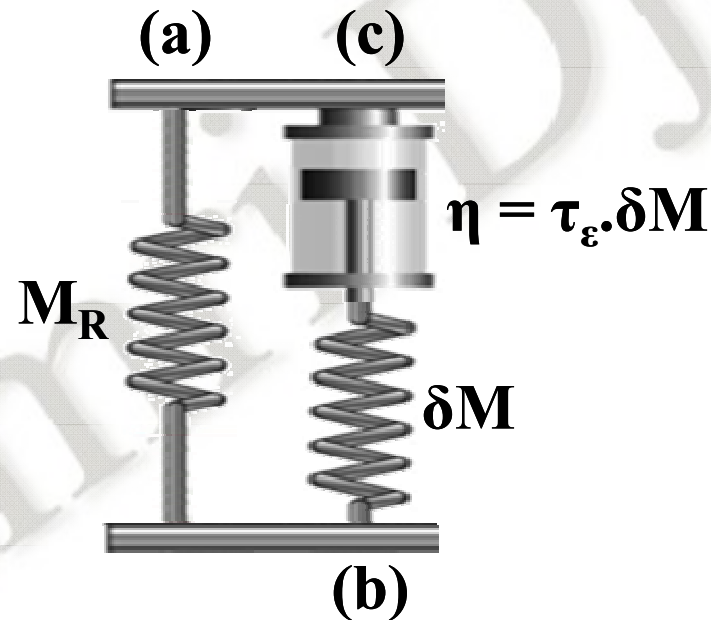


Figure 5. Le modèle à trois paramètres contenant une unité Maxwell.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 2. Fonction de contrainte relaxée normalisée (modèle à trois paramètres):

* Initialement, les deux ressorts (**a** et **b**) sont étendus, le ressort parallèle contourne le recouvrement du fluage via dissipateur (**c**) dans l'unité de Maxwell:

$$\sigma = M_U \cdot \epsilon_0 = (M_R + \delta M) \cdot \epsilon_0$$

* Au fur et à mesure que le temps passe, le dissipateur (**c**) relâche à zéro la déformation exercée sur le ressort (**b**). La contrainte est alors entièrement supportée par le ressort (**a**) et égale à

$$\ll M_R \cdot \epsilon_0 \gg.$$

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 2. Fonction de contrainte relaxée normalisée (modèle à trois paramètres):

* L'équation différentielle « contrainte-déformation » du modèle à trois paramètres contenant l'unité de Maxwell est de la forme:

$$\sigma + \tau_{\varepsilon} \cdot \sigma' = M_R \cdot \varepsilon + M_U \cdot \tau_{\varepsilon} \cdot \varepsilon'$$

$$\text{Avec: } \sigma_a = M_R \cdot \varepsilon_a, \sigma_b = \delta M \cdot \varepsilon_b, \sigma = \tau_{\varepsilon} \cdot \delta M \cdot \varepsilon_c'$$

* Cette équation est équivalente à celle du modèle à trois paramètres contenant l'unité de Voigt-Kelvin:

$$J_R \cdot \sigma + \tau_{\sigma} \cdot J_U \cdot \sigma' = \varepsilon + \tau_{\sigma} \cdot \varepsilon'$$

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 2. Fonction de contrainte relaxée normalisée (modèle à trois paramètres):

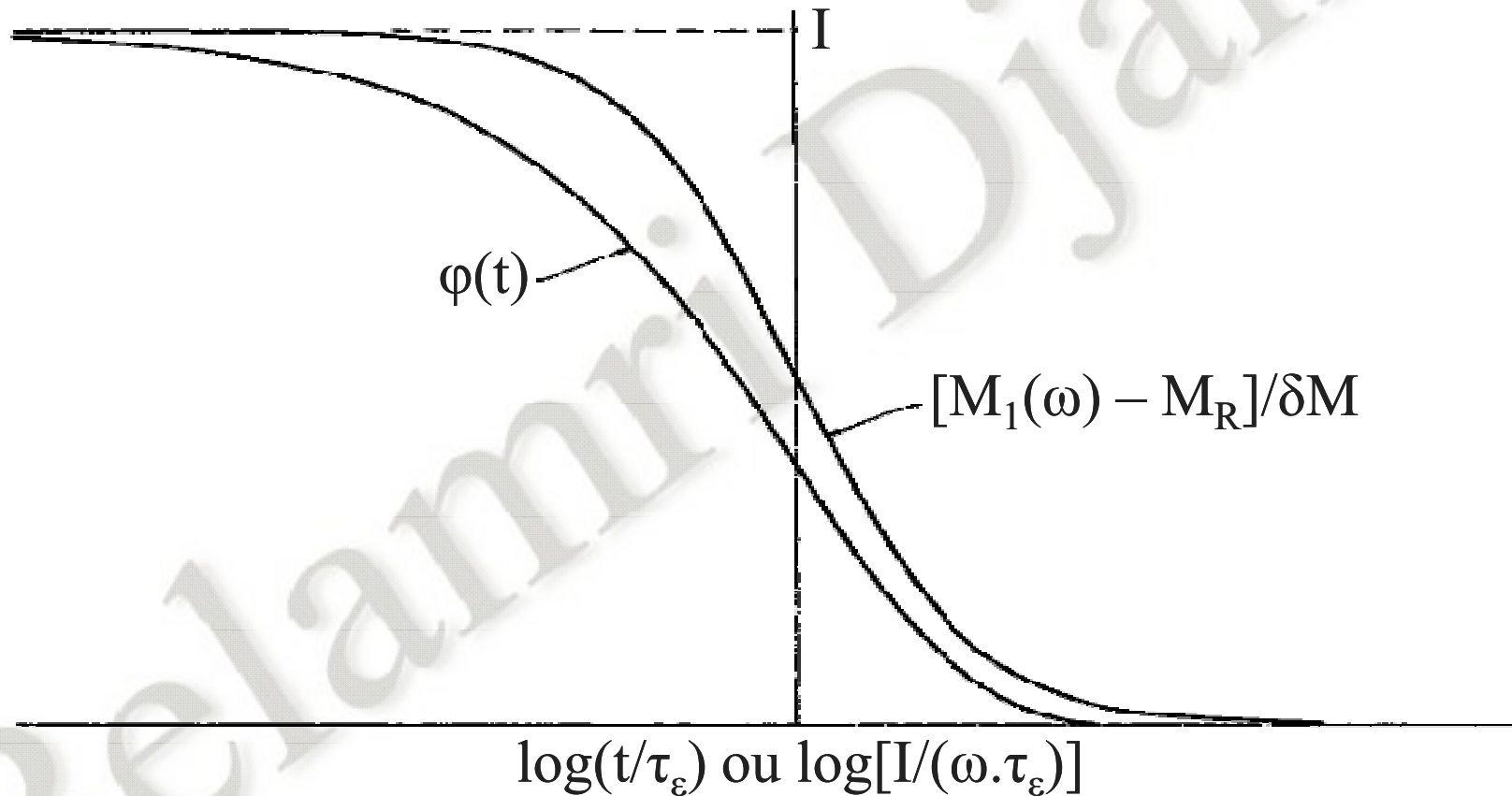


Figure 6. Fonctions de relaxation de contrainte $\varphi(t)$ et de $M_1(\omega)$ pour un solide anélastique standard

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 2. Fonction de contrainte relaxée normalisée (modèle à trois paramètres):

Résumé:

* Les deux modèles à trois paramètres donne la même équation différentielle « contrainte-déformation », donc il faut en conclure que les deux modèles sont équivalents. Ainsi, l'un ou l'autre modèle peut être utilisé pour représenter le solide anélastique standard.

* Le premier modèle, contenant l'unité de type Voigt-Kelvin, est le plus pratique pour l'analyse du comportement de fluage.

* Le deuxième modèle, contenant l'unité de type Maxwell, est le plus pratique pour l'analyse du comportement des matériaux en matière de relaxation des contraintes.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 3. Propriétés dynamiques du solide anélastique standard:

* Pour obtenir les fonctions de réponse dynamique J_1 et J_2 correspondant à une contrainte périodique donnée, nous substituons:

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \exp[i(\omega t)]$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_1 - i\varepsilon_2) \cdot \exp[i(\omega t)]$$

Dans l'équation différentielle « contrainte – déformation »:

$$J_R \cdot \sigma + \tau_\sigma \cdot J_U \cdot \sigma' = \varepsilon + \tau_\sigma \cdot \varepsilon'$$

Avec:

$$J_1 = \varepsilon_1 / \sigma_0 \text{ et } J_2 = \varepsilon_2 / \sigma_0 \text{ (chapitre I)}$$

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 3. Propriétés dynamiques du solide anélastique standard:

* On obtient ce qui suit:

$$J_R = J_1 + \omega \cdot \tau_\sigma \cdot J_2 \text{ et } \omega \cdot \tau_\sigma J_U = \omega \cdot \tau_\sigma \cdot J_1 - J_2$$

* Quand ceux-ci sont résolus pour J_1 et J_2 les résultats donnent:
« Des équations appelée souvent Debye »

$$J_1(\omega) = J_U + \delta J / [1 + \omega^2 \cdot \tau_\sigma^2]$$

$$J_2(\omega) = \delta J \cdot \omega \cdot \tau_\sigma / [1 + \omega^2 \cdot \tau_\sigma^2]$$

Remarque: équations de Debye puisqu'elles ont été dérivées pour la première fois par Debye dans le cas des relaxations diélectriques.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 3. Propriétés dynamiques du solide anélastique standard:

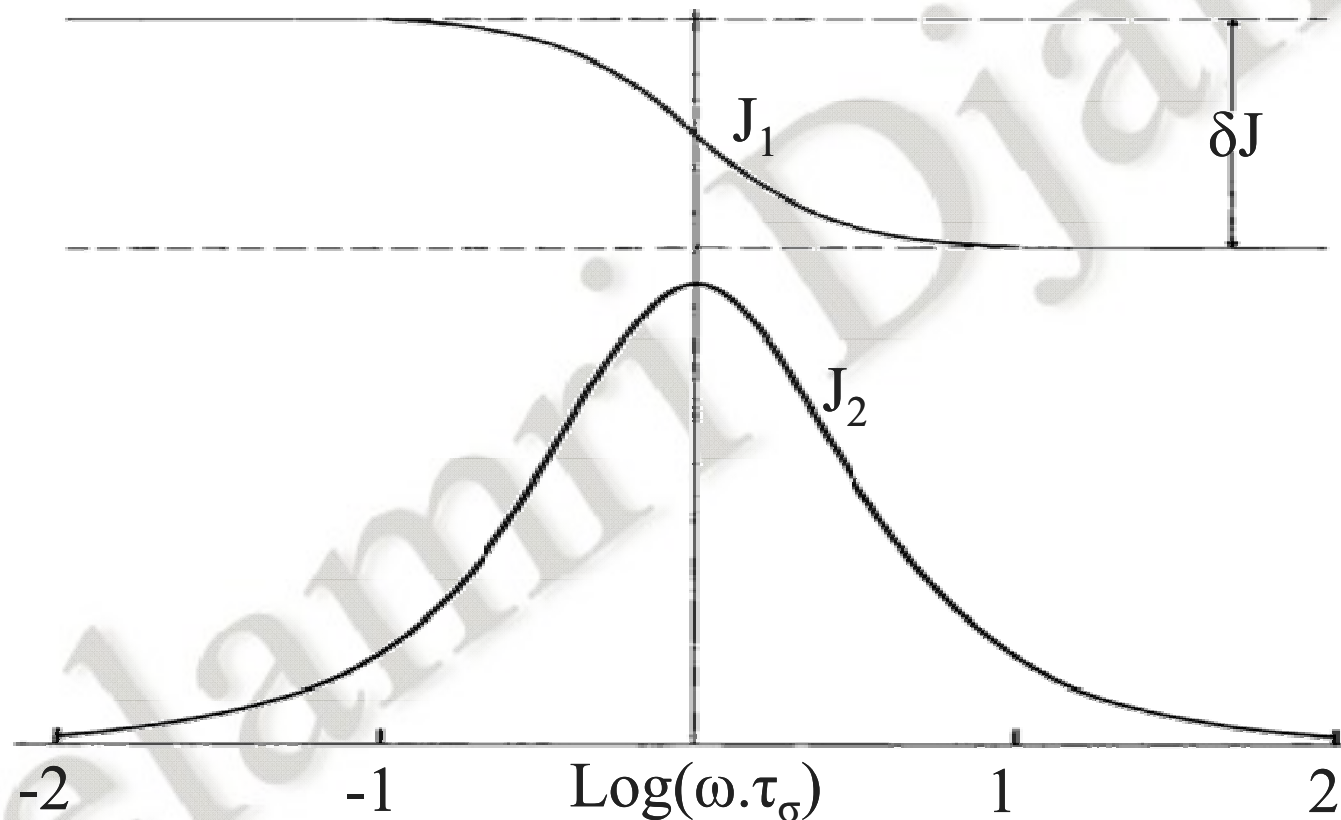


Figure 7. Comparaison de $J_1(\omega)$ et $J_2(\omega)$ en fonction de $\log(\omega \cdot \tau_\sigma)$ pour le solide anélastique standard

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 3. Propriétés dynamiques du solide anélastique standard:

- * La quantité J_1 varie de J_U pour les hautes fréquences ($\omega \cdot \tau_\sigma \gg 1$) à J_R pour les basses fréquences ($\omega \cdot \tau_\sigma \ll 1$).
- * La représentation graphique de $J_1(\omega)$ est comparée à la fonction $J_2(\omega)$ en fonction de $\log(\omega \cdot \tau_\sigma)$.
- * La quantité J_2 est représentée sous forme d'une fonction à sommet pour un maximum à $\omega \cdot \tau_\sigma = 1$ et des petites valeurs pour des fréquences hautes et basses ($\omega \cdot \tau_\sigma \ll 1$ ou $\omega \cdot \tau_\sigma \gg 1$)
- * Toute fonction de fréquence qui varie comme $\omega \cdot \tau / [1 + (\omega \cdot \tau)^2]$ sera appelé pic de Debye

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 3. Propriétés dynamiques du solide anélastique standard:

* Il est facile de montrer que lorsqu'une telle fonction est tracée par rapport à $\log(\omega.\tau)$, la courbe est symétrique par rapport à $\log(\omega.\tau) = 0$ (c'est-à-dire, $\omega.\tau = 1$), et la largeur du pic à mi-hauteur est donnée par:

$$\Delta \log(\omega.\tau) = 1,144 \text{ (pic de Debye)}$$

Pour un solide anélastique standard on à:

$$\text{tang}\phi = J_2/J_1 = \delta J.\omega.\tau_\sigma/[J_R + J_U.(\omega.\tau)^2]$$

$$|J(\omega)| = [J_1^2 + J_2^2]^{1/2} = [(J_R^2 + J_U^2.\omega^2.\tau_\sigma^2)/(1 + \omega^2.\tau_\sigma^2)]^{1/2}$$

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 3. Propriétés dynamiques du solide anélastique standard:

* De la même manière, pour les fonctions de réponse dynamique de type « M », elles peuvent être obtenues à partir de l'équation:

$$\sigma + \tau_{\varepsilon} \cdot \sigma' = M_R \cdot \varepsilon + M_U \cdot \tau_{\varepsilon} \cdot \varepsilon'$$

En remplaçant:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \exp[i(\omega t)]$$

$$\sigma = (\sigma_1 - i\sigma_2) \cdot \exp[i(\omega t)]$$

Avec:

$$M_1 = \sigma_1/\varepsilon_0 \text{ et } M_2 = \sigma_2/\varepsilon_0 \text{ (chapitre I)}$$

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 3. Propriétés dynamiques du solide anélastique standard:

* La procédure est analogue à celle utilisée ci-dessus pour obtenir « J_1 » et « J_2 »:

$$M_1(\omega) = M_U - \delta M / [1 + \omega^2 \cdot \tau_\varepsilon^2] = M_R + (\delta M \cdot \omega^2 \cdot \tau_\varepsilon^2) / [1 + \omega^2 \cdot \tau_\varepsilon^2]$$

$$M_2(\omega) = (\delta M \cdot \omega \cdot \tau_\varepsilon) / [1 + \omega^2 \cdot \tau_\varepsilon^2]$$

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 3. Propriétés dynamiques du solide anélastique standard:

- * La quantité M_1 varie de M_U pour les hautes fréquences ($\omega \cdot \tau_\sigma \gg 1$) à M_R pour les basses fréquences ($\omega \cdot \tau_\sigma \ll 1$).
- * La représentation graphique de $M_1(\omega)$ en fonction de $\log(\omega \cdot \tau_\varepsilon)$ est antisymétrique par rapport à $M_1 = (M_U + M_R)/2$ ou $\log(\omega \cdot \tau_\varepsilon) = 0$.
- * La quantité $M_2(\omega)$ est représentée sous forme d'une fonction à sommet pour un maximum à $\omega \cdot \tau_\varepsilon = 1$ et des petites valeurs pour des fréquences hautes et basses ($\omega \cdot \tau_\varepsilon \ll 1$ ou $\omega \cdot \tau_\varepsilon \gg 1$).

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 3. Propriétés dynamiques du solide anélastique standard:

* Zener a montré que $\phi(\omega)$ pour le solide anélastique standard peut être représenté sous la forme d'un pic de Debye sans approximation concernant la force de relaxation:

$$\text{tang}\phi = \delta J \cdot \omega \cdot \tau^* / (1 + \omega^2 \cdot \tau^{*2}) \cdot (J_U \cdot J_R)^{1/2} = \Delta \cdot \omega \cdot \tau^* / (1 + \omega^2 \cdot \tau^{*2}) \cdot (1 + \Delta)^{1/2}$$

$$\tau^* = (\tau_\sigma \cdot \tau_\epsilon)^{1/2} = \tau_\sigma \cdot (J_U / J_R)^{1/2} = \tau_\sigma / (1 + \omega^2 \cdot \tau_\sigma^2)^{1/2}$$

* Le pic de Debye se situe à:

$$\omega \cdot \tau^* = 1$$

$$\text{tang}\phi_{\max} = \Delta / 2 (1 + \Delta)^{1/2}$$

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 4. Propriétés dynamiques du solide standard anélastique en fonction de la température :

* La partie précédente montre que, pour le solide anélastique standard, des propriétés dynamiques telles que, J_1 , J_2 , M_1 , M_2 ou $\tan\phi$, prennent des formes particulièrement simples lorsqu'elles sont tracées en fonction de $\log(\omega\tau)$, où τ est l'un des temps de relaxation appropriés τ_σ , τ_ε , τ^* (variation de fréquence ω avec τ constant).

* Bien que la variation continue de la fréquence de vibration d'un système soit possible avec une méthode de sous-résonance, cela n'est pas possible lorsque les méthodes de résonance les plus courantes (décrites précédemment) sont utilisées.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 4. Propriétés dynamiques du solide standard anélastique en fonction de la température :

* Pour tracer le pic de « Debye » d'une façon complète, la variation de ω sur deux temps est nécessaire dans la méthode de la résonance. Cela veut dire que plusieurs spécimens, pouvant vibrer dans des modes différents, doivent être utilisés pour couvrir la plage de fréquence par un changement des membres d'inertie (généralement insuffisant pour passer un échantillon dans un pic de Debye.)

* Il existe toutefois un autre moyen de déterminer le pic, à savoir, faire varier τ tout en maintenant ω constante. Cette méthode est tellement importante dans la pratique que nous nous éloignerons du développement théorique principal pour aborder ce sujet dans la présente partie.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 4. Propriétés dynamiques du solide standard anélastique en fonction de la température :

* Cette méthode repose sur le fait que, dans de nombreux cas, le taux de relaxation τ^{-1} est exprimable par une « Equation d'Arrhenius »:

$$\tau^{-1} = \nu_0 \cdot \exp(-Q/kT)$$

$$\tau = \tau_0 \cdot \exp(Q/kT) \text{ avec } \tau_0 = \nu_0^{-1}$$

T: Température absolue

ν_0 : Facteur de fréquence (constant).

Q: Energie d'activation (Constante).

k: Constante de Boltzmann.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 4. Propriétés dynamiques du solide standard anélastique en fonction de la température :

* L'importance de la relation d'Arrhenius est que, dans les cas où elle s'applique, la valeur de « τ » peut être modifiée sur une large plage en modifiant la température.

* Par conséquent, il devient possible de traiter les fonctions de réponse dynamique comme si elles étaient des fonctions de température simplement en substituant l'équation d'Arrhenius dans les expressions de J_1 et J_2 , tout en considérant ω comme une constante.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 4. Propriétés dynamiques du solide standard anélastique en fonction de la température :

* L'équation d'Arrhenius peut être écrite linéairement:

$$\ln(\omega \cdot \tau) = \ln(\omega \cdot \tau_0) + (Q/k) \cdot (1/T)$$

* Dans le cas du pic de Deby « $\ln(\omega \cdot \tau) = 0$ » L'équation d'Arrhenius deviendra:

$$\ln(\omega \cdot \tau_0) + (Q/k) \cdot (1/T_p) = 0$$

T_p : Température qui correspond avec le pic de Debye.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 4. Propriétés dynamiques du solide standard anélastique en fonction de la température :

* Si une série de pics est obtenue à un certain nombre de fréquences différentes, un tracé en ligne droite peut être fait de « $\ln(\omega)$ » vs « $1/T_p$ », dont la pente est alors « Q/k ». Cette méthode est l'une des moyens couramment utilisé pour obtenir l'énergie d'activation Q .

* A partir du type de phénomène, on peut souvent estimer « τ_0 » à un ordre de grandeur près, puis estimer « Q » à partir de T_p ou inversement, en utilisant l'équation:

$$\ln(\omega \cdot \tau_0) + (Q/k) \cdot (1/T_p) = 0$$

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 4. Propriétés dynamiques du solide standard anélastique en fonction de la température :

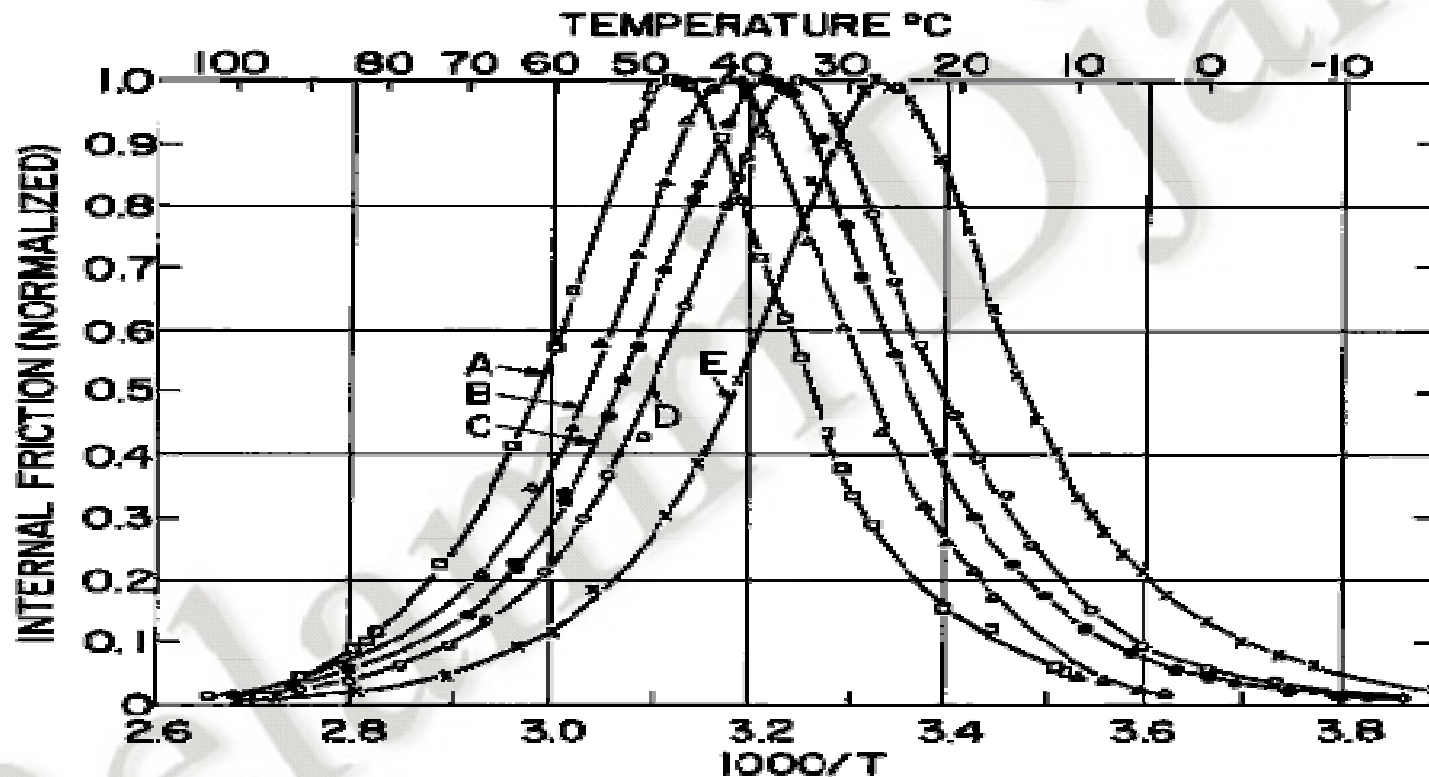


Figure 8. Une série de pics de frottement internes dus à la relaxation de « Snoek » dans un alliage Fe-C, tracés en fonction de $1/T$ pour cinq fréquences différentes. (Wert et Zener, 1949.)

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 4. Propriétés dynamiques du solide standard anélastique en fonction de la température :

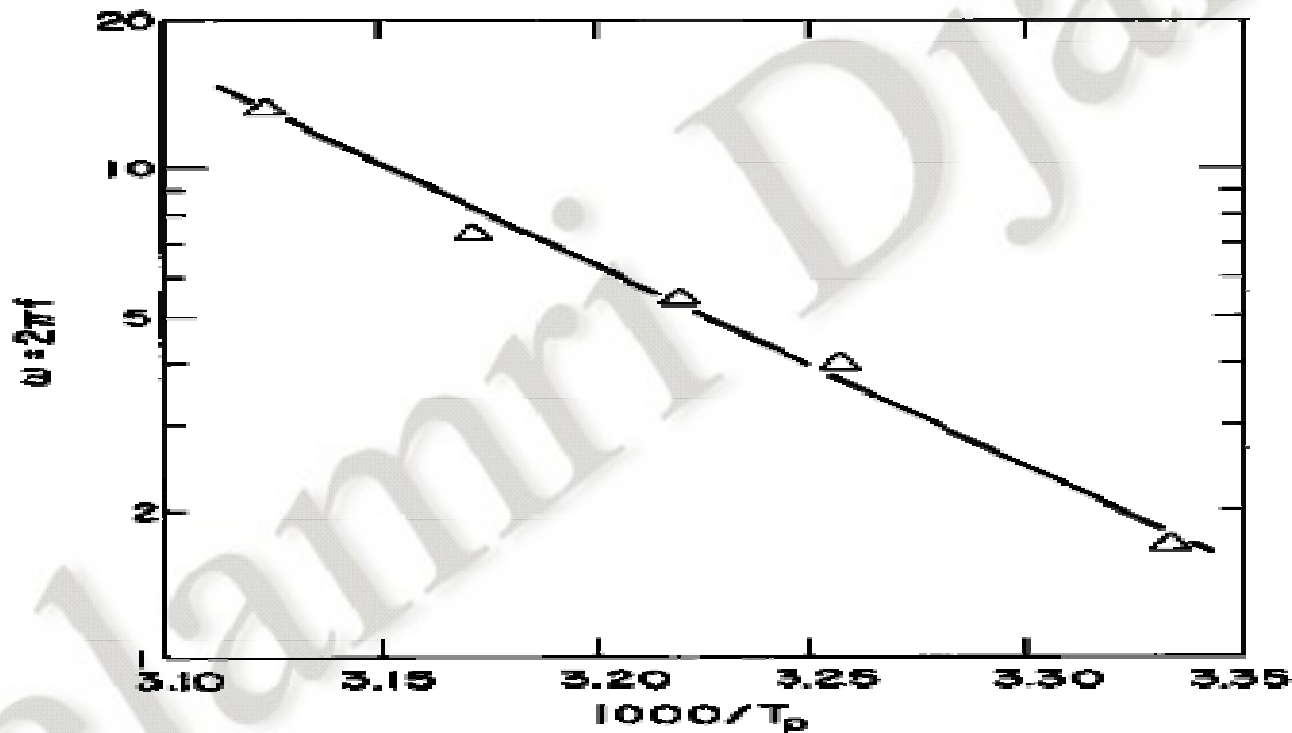


Figure 9. Courbe semi-logarithmique de ω en fonction de $1/T_p$ à partir des données de la figure 8. Une énergie d'activation $Q = 0,81$ eV est obtenue à partir de la pente de ce graphique

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 5. Plusieurs relaxations (spectres discrets):

* Précédemment, on a vu que les modèles mécaniques les plus simples d'un solide anélastique sont des modèles à trois paramètres, correspondant à une équation différentielle « contrainte-déformation » impliquant uniquement leurs dérivées.

* Pour un tel solide, il a été montré que les fonctions de fluage et de relaxation des contraintes sont toutes les deux exponentielles, chacune impliquant un seul temps de relaxation.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 5. Plusieurs relaxations (spectres discrets):

* Examinons maintenant le prochain ordre de complexité dans un modèle décrivant un solide anélastique. En partant du modèle à trois paramètres de type Voigt-Kelvin, on peut clairement répondre aux exigences en matière de comportement anélastique en fixant une deuxième unité Voigt-Kelvin en série avec la première.

* Un ressort isolé ou un dissipateur isolé ne suffira pas pour des raisons qui ont été discutées lors de l'élaboration des modèles précédents.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 5. Plusieurs relaxations (spectres discrets):

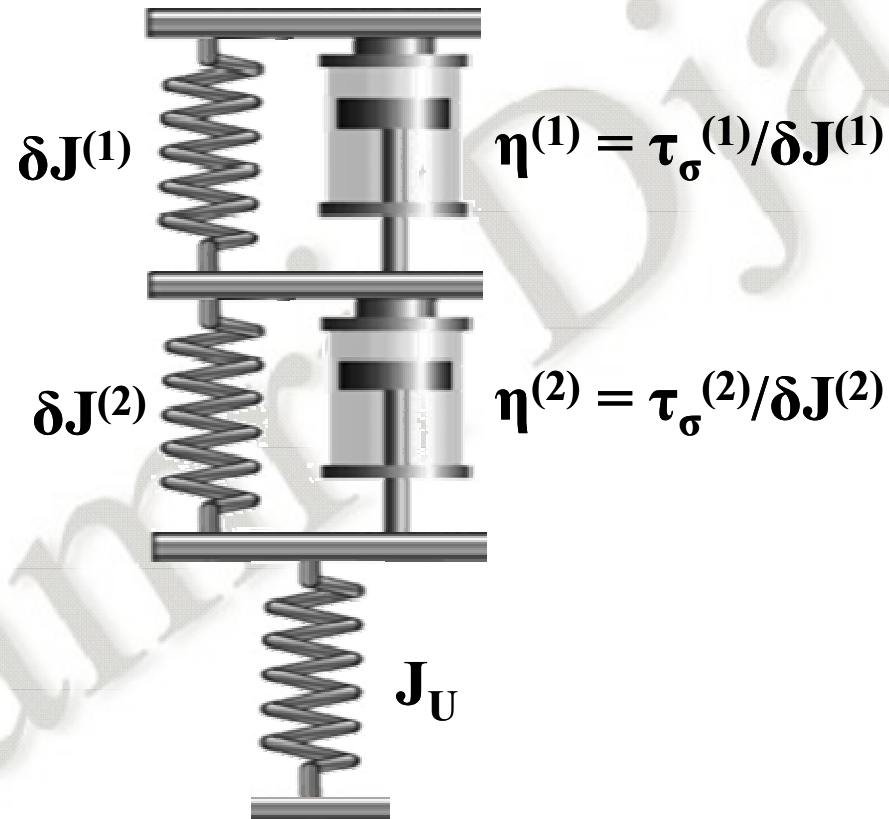


Figure 10. Modèle à cinq paramètres contenant deux unités de Voigt-Kelvin.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 5. Plusieurs relaxations (spectres discrets):

* L'écriture de l'équation différentielle « contrainte-déformation » appropriée pour chaque élément et l'élimination de toutes les variables à l'exception de la contrainte totale « σ » et de la déformation totale « ε », on obtient:

$$\begin{aligned} & \varepsilon'' + (1/\tau_{\sigma}^{(1)} + 1/\tau_{\sigma}^{(2)}) \cdot \varepsilon' + \varepsilon / (\tau_{\sigma}^{(1)} \cdot \tau_{\sigma}^{(2)}) \\ &= J_U \cdot \sigma'' + [\delta J^{(1)}/\tau_{\sigma}^{(1)} + \delta J^{(2)}/\tau_{\sigma}^{(2)} + (1/\tau_{\sigma}^{(1)} + 1/\tau_{\sigma}^{(2)}) \cdot J_U] \cdot \sigma' \\ &+ [((\delta J^{(1)} + \delta J^{(2)} + J_U) / (\tau_{\sigma}^{(1)} \cdot \tau_{\sigma}^{(2)}))] \cdot \sigma \end{aligned}$$

* L'ajout d'une deuxième unité de Voigt-Kelvin a donc modifié l'équation différentielle « contrainte-déformation » d'une équation du premier ordre à une équation du second ordre dans les deux sens ε et σ .

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 5. Plusieurs relaxations (spectres discrets):

* Il faut noter que ce résultat est équivalent à l'équation:

$$\mathbf{a}_0\sigma + \mathbf{a}_1\sigma' + \mathbf{a}_2\sigma'' + \mathbf{a}_3\sigma''' + \dots = \mathbf{b}_0\varepsilon + \mathbf{b}_1\varepsilon' + \mathbf{b}_2\varepsilon'' + \mathbf{b}_3\varepsilon''' + \dots$$

Avec les coefficients sauf $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ différents de zéro

* Il y a donc cinq paramètres indépendants dans l'équation différentielle de « contrainte – déformation ».

* La déformation totale représente la somme des déformations du ressort avec les deux unités de Voigt-Kelvin.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 5. Plusieurs relaxations (spectres discrets):

* La fonction de fluage peut être immédiatement obtenue à partir du modèle, sans qu'il soit nécessaire de résoudre l'équation différentielle:

$$J(t) = J_U + \delta J^{(1)} \cdot [1 - \exp(-t/\tau_\sigma^{(1)})] + \delta J^{(2)} \cdot [1 - \exp(-t/\tau_\sigma^{(2)})]$$

* Cette solution peut être vérifiée en la substituant dans l'équation différentielle « contrainte – déformation ». Cela montre que la fonction de fluage est composée de la somme de deux expressions exponentielle avec:

$$J_R = J_U + \delta J^{(1)} + \delta J^{(2)}$$

Avec $\tau_\sigma^{(1)}$ et $\tau_\sigma^{(2)}$: Les temps de relaxation à contrainte constante

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 5. Plusieurs relaxations (spectres discrets):

* De la même manière, pour:

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \exp[i(\omega t)] \text{ et } \varepsilon = (\varepsilon_1 - i\varepsilon_2) \cdot \exp[i(\omega t)]$$

* Et par analogie par rapport aux formules:

$$J_1(\omega) = J_U + \delta J / [1 + (\omega \cdot \tau_\sigma)^2] \text{ et } J_2(\omega) = \delta J \cdot \omega \cdot \tau_\sigma / [1 + (\omega \cdot \tau_\sigma)^2]$$

On obtient ce qui suit:

$$J_1(\omega) = J_U + \delta J^{(1)} / [1 + (\omega \cdot \tau_\sigma^{(1)})^2] + \delta J^{(2)} / [1 + (\omega \cdot \tau_\sigma^{(2)})^2]$$

$$J_2(\omega) = \delta J^{(1)} \cdot \omega \cdot \tau_\sigma^{(1)} / [1 + (\omega \cdot \tau_\sigma^{(1)})^2] + \delta J^{(2)} \cdot \omega \cdot \tau_\sigma^{(2)} / [1 + (\omega \cdot \tau_\sigma^{(2)})^2]$$

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 5. Plusieurs relaxations (spectres discrets):

* L'obtention des fonctions de réponse de type M à partir du modèle à deux unités de Voigt-Kelvin n'est pas évident, donc il est plus adapté de se tourner vers le modèle à deux unités de Maxwell:

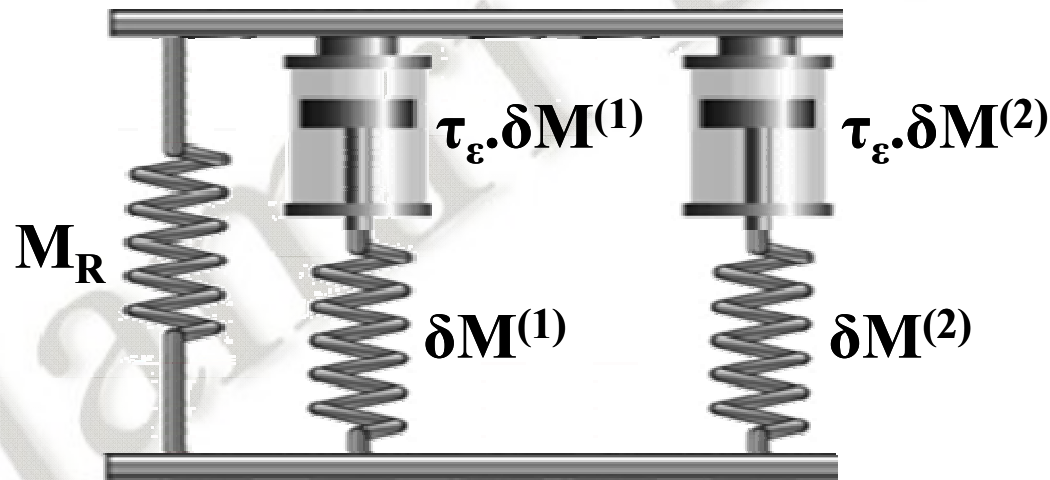


Figure 11. Modèle à cinq paramètres contenant deux unités Maxwell

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 5. Plusieurs relaxations (spectres discrets):

* La contrainte totale représente la somme des contraintes du ressort avec les deux unités de Maxwell.

* De même manière, l'équation différentielle « contrainte-déformation » appropriée pour chaque élément et l'élimination de toutes les variables à l'exception de la contrainte totale « σ » et de la déformation totale « ε », on obtient: :

$$\sigma'' + (1/\tau_{\varepsilon}^{(1)} + 1/\tau_{\varepsilon}^{(2)}) \cdot \sigma' + \sigma / (\tau_{\varepsilon}^{(1)} \cdot \tau_{\varepsilon}^{(2)})$$

=

$$\mathbf{M}_U \cdot \varepsilon'' + [\delta \mathbf{M}^{(1)} / \tau_{\varepsilon}^{(1)} + \delta \mathbf{M}^{(2)} / \tau_{\varepsilon}^{(2)} + (1/\tau_{\varepsilon}^{(1)} + 1/\tau_{\varepsilon}^{(2)}) \cdot \mathbf{M}_R] \cdot \varepsilon' + \mathbf{M}_R / (\tau_{\varepsilon}^{(1)} \cdot \tau_{\varepsilon}^{(2)}) \cdot \varepsilon$$

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 5. Plusieurs relaxations (spectres discrets):

* La fonction de la contrainte relaxée peut être obtenue à partir du modèle, sans qu'il soit nécessaire de résoudre l'équation différentielle:

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}_R + \delta\mathbf{M}^{(1)}.[1 - \exp(-t/\tau_\varepsilon^{(1)})] + \delta\mathbf{M}^{(2)}.[1 - \exp(-t/\tau_\varepsilon^{(2)})]$$

* Cette solution peut être vérifiée en la substituant dans l'équation différentielle « contrainte – déformation ». Cela montre que la fonction de la contrainte relaxée est composée de la somme de deux expressions exponentielle avec:

$$\mathbf{M}_U = \mathbf{M}_R + \delta\mathbf{M}^{(1)} + \delta\mathbf{M}^{(2)}$$

Avec $\tau_\varepsilon^{(1)}$ et $\tau_\varepsilon^{(2)}$: Les temps de relaxation à déformation constante

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 5. Plusieurs relaxations (spectres discrets):

* De la même manière, pour:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \exp[i(\omega t)] \text{ et } \sigma = (\sigma_1 - i\sigma_2) \cdot \exp[i(\omega t)]$$

On obtient ce qui suit:

$$\begin{aligned} M_1(\omega) = & M_R + \delta M^{(1)} \cdot [\omega \tau_\varepsilon^{(1)}]^2 / [1 + (\omega \tau_\varepsilon^{(1)})^2] \\ & + \delta M^{(2)} \cdot [\omega \tau_\varepsilon^{(2)}]^2 / [1 + (\omega \tau_\varepsilon^{(2)})^2] \end{aligned}$$

$$M_2(\omega) = \delta M^{(1)} \cdot \omega \tau_\varepsilon^{(1)} / [1 + (\omega \tau_\varepsilon^{(1)})^2] + \delta M^{(2)} \cdot \omega \tau_\varepsilon^{(2)} / [1 + (\omega \tau_\varepsilon^{(2)})^2]$$

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 5. Plusieurs relaxations (spectres discrets):

* On en conclut que pour le solide à cinq paramètres, les fonctions de réponse $J(t)$, $M(t)$, $J_1(\omega)$, $J_2(\omega)$, $M_1(\omega)$ et $M_2(\omega)$ sont tous représentés sous forme de sommes contenant deux termes, impliquant chacun un seul temps de relaxation, à la place du terme unique du solide anélastique standard.

* En particulier, J_2 et M_2 sont maintenant la somme de deux pics de Debye. Par contre, le frottement interne, qui était représenté par un seul pic de Debye dans le cas du solide anélastique standard, n'est en général pas exprimable par la somme de deux pics de Debye.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 5. Plusieurs relaxations (spectres discrets):

- * Le traitement du solide à cinq paramètres est facilement généralisé à des modèles plus complexes:
- * Par induction mathématique, le modèle de type-J contenant « n » unités de Voigt-Kelvin en série, les unes avec les autres, et avec un ressort correspond à une équation différentielle « contrainte-déformation » qui contient tous les termes jusqu'à l'ordre « n » dans les deux sens ε et σ .
- * Egalement pour le modèle de type-M contenant « n » unités Maxwell toutes en parallèle, les unes avec les autres, et avec un ressort équivaut à une équation « contrainte-déformation » différentielle de forme identique.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 5. Plusieurs relaxations (spectres discrets):

* On peut donc en conclure que les deux modèles différents sont mécaniquement équivalents et que leurs paramètres peuvent en principe être inter-reliés en assimilant des coefficients identiques dans l'équation différentielle « contrainte-déformation ».

Théorème:

Pour une équation différentielle de l'ordre « n » de « contrainte-déformation » de la forme on à :

$$a_0\sigma + a_1\sigma' + a_2\sigma'' + a_3\sigma''' + \dots = b_0\varepsilon + b_1\varepsilon' + b_2\varepsilon'' + b_3\varepsilon''' + \dots$$

On à : « $a_0/b_0 = J_R$ et $a_n/b_n = J_U$ »

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 5. Plusieurs relaxations (spectres discrets):

* L'avantage réel de l'utilisation des modèles devient particulièrement évident pour les cas les plus complexes ($n > 2$). Ainsi, la fonction de fluage pour le modèle à cinq paramètres ($n = 2$) est facilement généralisé pour un modèle contenant « n » unités de Voigt-Kelvin:

$$J(t) = J_U + \sum_{(i=1 \rightarrow n)} (\delta J^{(i)} \cdot [1 - \exp(-t/\tau_\sigma^{(i)})])$$

Avec les fonctions dynamiques suivantes:

$$J_1(\omega) = J_U + \sum_{(i=1 \rightarrow n)} (\delta J^{(i)} / [1 + (\omega \cdot \tau_\sigma^{(i)})^2])$$

$$J_2(\omega) = \sum_{(i=1 \rightarrow n)} (\delta J^{(i)} \cdot \omega \cdot \tau_\sigma^{(i)} / [1 + (\omega \cdot \tau_\sigma^{(i)})^2])$$

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 5. Plusieurs relaxations (spectres discrets):

* De même pour un modèle contenant « n » unités de Maxwell:

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}_R + \sum_{(j=1 \rightarrow n)} (\delta \mathbf{M}^{(j)} \cdot [\exp(-t/\tau_\varepsilon^{(j)})])$$

Avec les fonctions dynamiques suivantes:

$$\mathbf{M}_1(\omega) = \mathbf{M}_R + \sum_{(j=1 \rightarrow n)} (\delta \mathbf{M}^{(j)} \cdot (\omega \tau_\varepsilon^{(j)})^2 / [1 + (\omega \tau_\varepsilon^{(j)})^2])$$

$$\mathbf{M}_2(\omega) = \sum_{(j=1 \rightarrow n)} (\delta \mathbf{M}^{(j)} \cdot \omega \tau_\varepsilon^{(j)} / [1 + (\omega \tau_\varepsilon^{(j)})^2])$$

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 5. Plusieurs relaxations (spectres discrets):

- * Un tel solide peut être décrit comme un « spectre discret » de processus de relaxation, ou simplement un « spectre discret de relaxation ».
- * Chacune des « n lignes » du spectre est caractérisée par un temps de relaxation « $\tau_{\sigma}^{(i)}$ ou $\tau_{\varepsilon}^{(j)}$ » et une magnitude « $\delta J^{(i)}$ ou $\delta M^{(j)}$ ».
- * En ce sens, le solide anélastique standard est un spectre à une ligne, autrement dit: « Temps de relaxation unique ».

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 5. Plusieurs relaxations (spectres discrets):

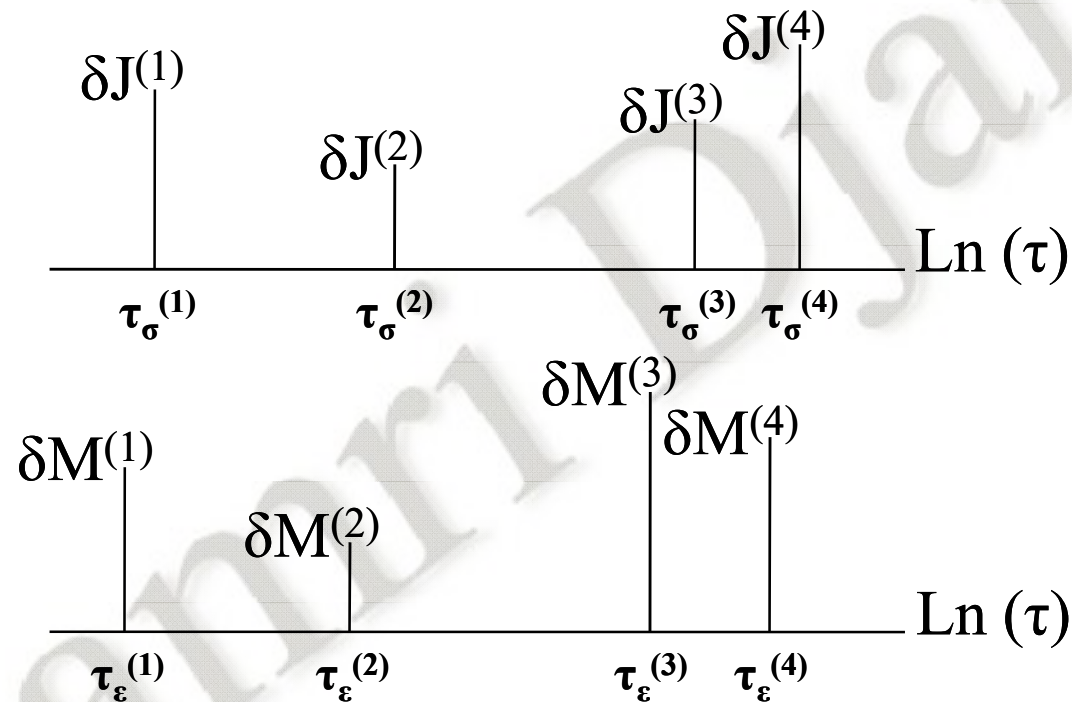


Figure 12. Illustration schématique de manière utile du spectre de temps de relaxation:

- (a) Contrainte constante « τ_σ »
- (b) Déformation constante « τ_ϵ ».

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 5. Plusieurs relaxations (spectres discrets):

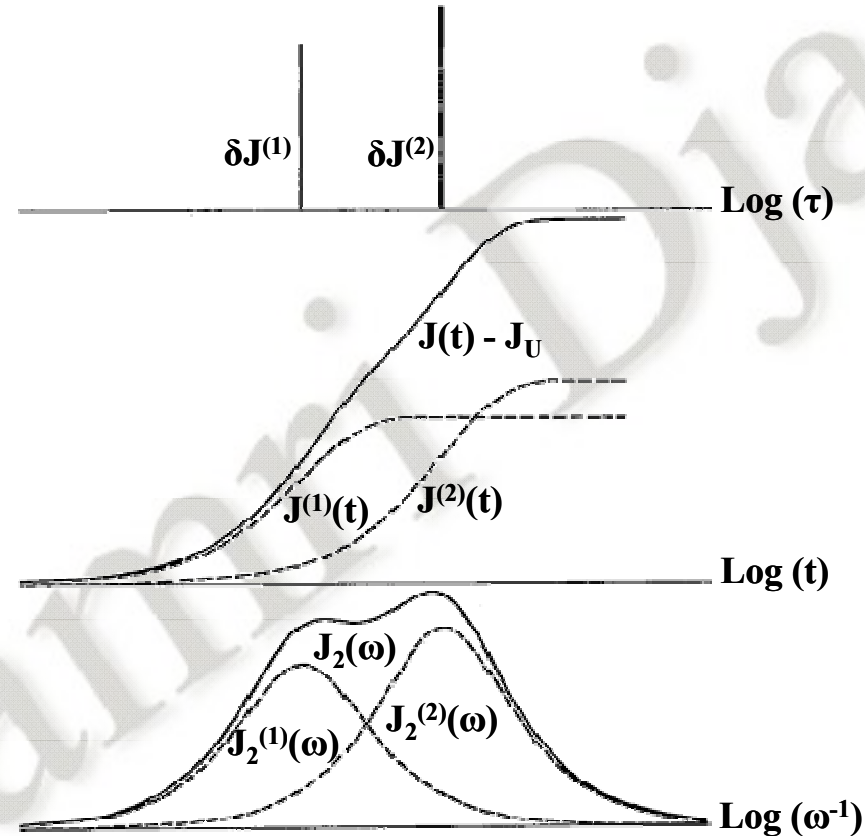


Figure 13. La fonction de réponse $J(t)$ et $J_2(\omega)$ pour un spectre à deux lignes ($\tau_1/\tau_2 = 1/10$ et $\delta J_1/\delta J_2 = 9/11$). Les courbes en pointillés montrent la réponse associée à chaque ligne séparément.

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 5. Plusieurs relaxations (spectres discrets):

* On peut donc en déduire que dans le cas d'un spectre à deux lignes (modèle à cinq paramètres), la fonction de réponse ne sera bien résolue que comme deux fonctions de relaxation simples si la paire de valeurs de « τ » diffère l'une de l'autre.

* Dans ce cas, les fonctions « J_2 et M_2 » présentent un double pic, tandis que les fonctions « $J(t)$ et $M(t)$ » présentent une double inflexion lorsqu'elles sont tracées en fonction de $\log(t)$ [ou « $J_1(t)$ et $M_1(t)$ » par rapport à $\log(\omega)$].

Propriétés Physique de la matière condensée 1

II. Modèles Mécaniques et Spectres discrets

2. 5. Plusieurs relaxations (spectres discrets):

* Il est utile de noter que la relaxation total de la complaisance δJ est la somme des relaxations individuels $\delta J^{(i)}$ (même chose pour la relaxation totale du module de Young δM):

$$\delta J \equiv J_R - J_U = \sum_{(i=1 \rightarrow n)} (\delta J^{(i)})$$

$$\delta M \equiv M_U - M_R = \sum_{(j=1 \rightarrow n)} (\delta M^{(j)})$$