III. Spectre Continu

1. Introduction:

* Dans le présent chapitre, on considère le cas d’une distribution continue des temps de relaxation.

* Vu l’importance de ce type des spectres continus, l’obtention du spectre à partir d’une fonction de réponse donnée oblige un traitement généralement pratique,.

* Enfin, le fait que les temps de relaxation obéissent à l'équation d'Arrhenius, pour la plupart des processus, on peut dire qu’il a un effet profond sur l'interprétation des spectres de relaxation et l'analyse des données.

2. Spectres de relaxation continue à contraintes et à déformations constantes :

* Dans le cas des spectres discrets, la fonction de réponse donnée est peut être dupliquée avec la précision souhaitée en choisissant un ensemble discret de temps de relaxation « $\tau_\sigma^{(i)}$ ou $\tau_\varepsilon^{(j)}$ » suffisamment grand (i = 1, ..., n).

* Cette procédure permet de rechercher un modèle avec des unités de (Voigt-Kelvin ou Maxwell) dont le comportement de réponse simule celui d’un matériau réel.

2. Spectres de relaxation continue à contraintes et à déformations constantes :

* Sauf dans le cas de raies spectrales bien séparées, le choix des valeurs de « τ » pour adapter une fonction de réponse est subjectif, de sorte que le spectre ne peut être considéré comme une caractérisation unique du matériau.

* Il est alors préférable de permettre à « τ » de présenter toutes les valeurs, de sorte que le spectre puisse être exprimé en fonction de la variable continue.

2. Spectres de relaxation continue à contraintes et à déformations constantes :

* Le choix de variable « In[r] » au lieu de « τ » est plus appropriée pour identifier le passage d'un spectre discret à un spectre continu pour $\delta J^{(i)}$:

$$\boldsymbol{\delta J^{(i)} \rightarrow X(\ln[\tau]).d(\ln[\tau])}$$

* X(In[r]).d(ln[τ]) est la contribution au δJ total des valeurs de In[τ] dont la valeur varie entre « In[τ] » et « In[r] + d(In[r]) ».

* La fonction X(In[r]) est appelée le « **Spectre de relaxation à déformation constante** » et présente des dimensions de la complaisance.

2. Spectres de relaxation continue à contraintes et à déformations constantes :

* De la même manière l'identification du passage d'un spectre discret à un spectre continu pour $\delta M^{(i)}$:

$$\boldsymbol{\delta M^{(i)} \rightarrow Y(\ln[\tau]).d(\ln[\tau])}$$

* Y(In[r]).d(ln[τ]) est la contribution au δM total des valeurs de In[τ] dont la valeur varie entre « In[τ] » et « In[r] + d(In[r]) ».

* La fonction Y(In[r]) est appelée le « **Spectre de relaxation à contrainte constante** » et présente des dimensions du module de Young.

2. Spectres de relaxation continue à contraintes et à déformations constantes :

* On remplaçant les valeurs de $\delta J^{(i)}$ dans les relations des fonctions de fluage on obtient:

$$J(t) = J_U + \int_{(-\infty \to +\infty)} X(\ln[\tau]).(1 - \exp[-t/\tau]).d(\ln[\tau])$$

$$J_1(\omega) = J_U + \int_{(-\infty \to +\infty)} X(\ln[\tau]).\, d(\ln[\tau])/(1 + [\omega\tau]^2)$$

$$J_2(\omega) = \int_{(-\infty \to +\infty)} X(\ln[\tau]).(\omega\tau).d(\ln[\tau])/(1 + [\omega\tau]^2)$$

$$\text{Avec: } \delta J = \int_{(-\infty \to +\infty)} X(\ln[\tau]).d(\ln[\tau])$$

2. Spectres de relaxation continue à contraintes et à déformations constantes :

* De la même façon, le remplacement des valeurs de $\delta M^{(i)}$ dans les relations des fonctions de contrainte relaxée donne:

$$\mathbf{M(t) = M_R + \int_{(-\infty \to +\infty)} Y(\ln[\tau]).(\exp[-t/\tau]).d(\ln[\tau])}$$

$$\mathbf{M_1(\omega) = M_R + \int_{(-\infty \to +\infty)} Y(\ln[\tau]).[\omega\tau]^2.d(\ln[\tau])/(1 + [\omega\tau]^2)}$$

$$\mathbf{M_2(\omega) = \int_{(-\infty \to +\infty)} Y(\ln[\tau]).(\omega\tau).d(\ln[\tau])/(1 + [\omega\tau]^2)}$$

$$\mathbf{Avec:\ \delta M = \int_{(-\infty \to +\infty)} Y(\ln[\tau]).d(\ln[\tau])}$$

2. Spectres de relaxation continue à contraintes et à déformations constantes :

* Il est commode d'introduire également les spectres normalisés ou les fonctions de distribution, définies par :

$$\Psi(\ln[\tau]) = (1/\ \delta J).X(\ln[\tau])$$

$$\Phi(\ln[\tau]) = (1/\ \delta M).Y(\ln[\tau])$$

Ou:

$$\int_{(-\infty \to +\infty)} \Psi(\ln[\tau]).d(\ln[\tau]) = 1$$

$$\int_{(-\infty \to +\infty)} \Phi(\ln[\tau]).d(\ln[\tau]) = 1$$

2. Spectres de relaxation continue à contraintes et à déformations constantes :

* Les définitions de la fonction de fluage normalisée $\psi(t)$ et la fonction de relaxation de contrainte normalisée $\varphi(t)$ peuvent être exprimées en termes de spectres normalisés correspondants de la façon suivante:

$$\mathbf{1 - \psi(t) = \int_{(-\infty \to +\infty)} \Psi(\ln[\tau]).(\exp[-t/\tau]).d(\ln[\tau])}$$

$$\mathbf{\varphi(t) = \int_{(-\infty \to +\infty)} \Phi(\ln[\tau]).(\exp[-t/\tau]).d(\ln[\tau])}$$

Il est important de noter que ces équations sont essentiellement des intégrales de Laplace

2. Spectres de relaxation continue à contraintes et à déformations constantes :

* De telles intégrales peuvent être utilisées pour décrire toute fonction intégrable continue en fonction de « t ».

* La description du fluage et de la relaxation des contraintes en termes de spectre de temps de relaxation est généralement valide.

* "Gross" (1947) a réussi à obtenir des relations exactes suffisamment adaptées aux méthodes de calcul numériques des deux spectres de relaxations normalisés.

2. Spectres de relaxation continue à contraintes et à déformations constantes :

$$Y(\ln[\tau]) = X(\ln[\tau])/[J_U + \int_{(-\infty \rightarrow +\infty)} X(\ln[u]).(1 + u/\tau)^{-1}.d(\ln[u])]^2 + \pi^2 X^2(\ln[\tau])$$

$$X(\ln[\tau]) = Y(\ln[\tau])/[M_R - \int_{(-\infty \rightarrow +\infty)} Y(\ln[u]).(1 + [u/\tau]^{-1})^{-1}.d(\ln[u])]^2 + \pi^2 Y^2(\ln[\tau])$$