

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## IV. Var. internes, bases thermodynamique des spectres de relaxation

### 5. Spectres de relaxation sous différentes conditions :

#### **En résumé:**

Comme indiqué précédemment, dans le cas de plusieurs variables internes, les paramètres thermodynamiques sont liés entre eux de la même manière; Cependant, en général, chaque temps de relaxation en mode normal dans un nouvel ensemble de conditions expérimentales est lié à tous les temps de relaxation d'origine. Par conséquent, la généralisation des équations au cas de plusieurs variables conduit à des expressions plus complexes.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 1. Introduction:

- \* Jusqu'à maintenant, notre étude sur le comportement élastique et anélastique traite la contrainte et la déformation comme s'ils étaient des quantités scalaires.
- \* Cette approche nous a permis de concentrer notre attention sur les réponse qui différencie l'élasticité de l'anélasticité.
- \* Dans ce chapitre, la contrainte et la déformation sont décrites comme des tenseurs symétriques de second ordre, impliquant six composants.
- \* Comme au chapitre 1, où l'anélasticité a été abordée pour la première fois sous forme scalaire de la loi de Hooke nous aborderons l'anélasticité anisotrope par élasticité anisotrope.
- \* Dans le cas le plus général d'anélasticité anisotrope, jusqu'à 21 constantes élastiques peut dépendre du temps (ou de la fréquence).

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 1. Introduction:

\* Cependant, nous verrons que pour les cristaux des symétries supérieures, le problème n'est pas vraiment aussi redoutable qu'on pourrait l'imaginer.

\* Nous verrons en effet que le matériau présenté dans les chapitres précédents est directement applicable au cas des cristaux déformés de manière appropriée et simple, et facilement étendu à des cas plus généraux.

\* On peut également remarquer que, même pour les matériaux isotropes, le comportement d'un spécimen sous un mode de déformation arbitraire est préférablement liées à certaines fonctions de réponse caractéristiques obtenues à partir des formulation plus générale de la loi de Hooke.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 2. Déformation, contrainte et la loi de Hooke :

\* Nous ne décrirons ici que les équations nécessaires au traitement de l'anélasticité avec les définitions conventionnelles des composantes de contrainte et de déformation.

\* Les composantes de la contrainte en un point sont définies en termes de forces qui agissent sur les faces d'un cube unité, dont un coin est à l'origine  $O$  et dont les bords sont parallèles aux axes de coordonnées, c'est-à-dire à  $(Ox_1, Ox_2, \text{ et } Ox_3)$  respectivement, comme le montre la Figure 14.

\* Pour plus de commodité de référence, les faces perpendiculaires aux axes principaux  $(Ox_1, Ox_2, Ox_3)$  sont notés par  $(1, 2, 3)$  respectivement.



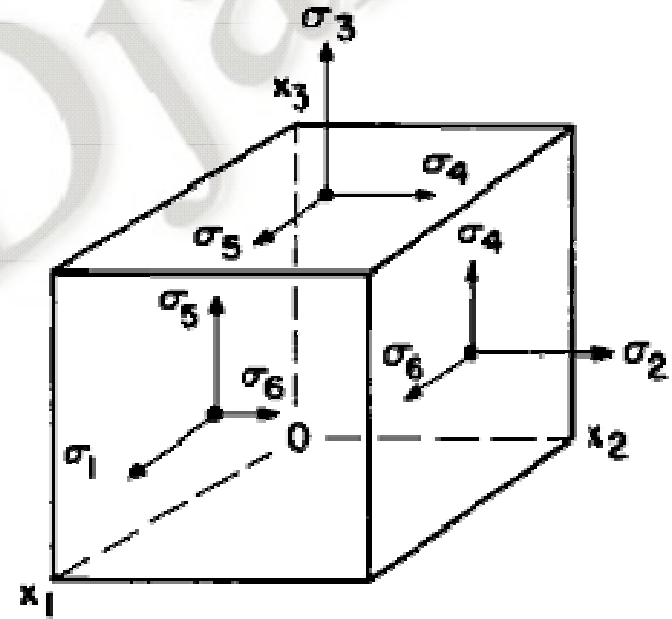
# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 2. Déformation, contrainte et la loi de Hooke :

\* La force transmise à travers chaque face (c'est-à-dire force exercée par le matériau à l'extérieur du cube sur le matériau à l'intérieur) peut être décrite par des composants parallèles aux trois axes, de sorte qu'il y a neuf composants en tout.

\* Cependant, en raison de l'équilibre statique, certains de ces composants sont égaux. Le résultat est qu'il y a six composants indépendants.



**Figure 14.** Un cube unitaire, montrant les six composantes de la contrainte.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 2. Déformation, contrainte et la loi de Hooke :

\* Les composantes de traction  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont définies comme des forces par unité de surface normales aux faces 1, 2 et 3, respectivement.

\* La contrainte de cisaillement  $\sigma_4$  est la force agissant sur la face 2 qui est dirigée parallèlement à  $Ox_3$  (ou sur la face 3 dirigée parallèlement à  $Ox_2$ ). Elle peut donc être appelé comme composante de contrainte de cisaillement 2-3.

\* De même,  $\sigma_5$  est la contrainte de cisaillement 3-1 et  $\sigma_6$  la contrainte de cisaillement 1-2 (voir figure 14).

\* Les composantes de la déformation sont définies comme suit:

En tout point du milieu, soit  $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$  le déplacement vectoriel du point depuis sa position dans un état de référence (sans contrainte). Soit  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) la  $i$ -ième composante de ce déplacement.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 2. Déformation, contrainte et la loi de Hooke :

Donc:

$$\varepsilon_i = \partial u_i / \partial x_i, \quad i = 1, 2 \text{ ou } 3$$

définit les trois composantes de la déformation en traction,

Tandis que:

$$\varepsilon_4 = \partial u_2 / \partial x_3 + \partial u_3 / \partial x_2, \quad \varepsilon_5 = \partial u_3 / \partial x_1 + \partial u_1 / \partial x_3, \quad \varepsilon_6 = \partial u_1 / \partial x_2 + \partial u_2 / \partial x_1$$

sont les composants de la contrainte de cisaillement.

Les composantes de contrainte et de déformation peuvent être définies en termes de notation tenseur à deux indices (ce qui est utile pour déterminer comment les composants changent sous une transformation des axes de coordonnées, une telle notation sera nécessaire).

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 2. Déformation, contrainte et la loi de Hooke :

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{ii}, \sigma_i = \sigma_{ii} \text{ avec } i = 1, 2 \text{ ou } 3$$

définit les trois composantes de la déformation en traction,

Tandis que:

$$\varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23}, \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{31}, \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12}, \sigma_4 = \sigma_{23}, \sigma_5 = \sigma_{31}, \sigma_6 = \sigma_{12}$$

sont les composants de la contrainte de cisaillement.



# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 2. Déformation, contrainte et la loi de Hooke :

$$\sigma_i = \sum_{(j=1 \rightarrow 6)} C_{ij} \varepsilon_j \text{ avec } i = 1 \rightarrow 6$$

Les 36 ( $C_{ij}$ ), qui forment une matrice 6X6, sont appelés « Modules d'élasticité » ou « Constantes de rigidité élastique ».

Inversement, les composantes de déformation peuvent être exprimées en fonctions linéaires des composantes de contrainte, ou

$$\varepsilon_i = \sum_{(j=1 \rightarrow 6)} S_{ij} \sigma_j \text{ avec } i = 1 \rightarrow 6$$

Les 36 quantités  $S_{ij}$  sont connues sous le nom de « Modules de complaisance » ou de « Constantes de complaisance élastique ». Il est clair que  $S_{ij}$  peut être exprimé en termes de constantes  $C_{kl}$  par l'utilisation directe de déterminants.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 2. Déformation, contrainte et la loi de Hooke :

\* Sous ces formes, la loi de Hooke a les mêmes caractéristiques générales que la relation plus simple du premier chapitre, à savoir, la déformation est instantanée, linéaire et récupérable.

\* Une simplification significative des matrices  $c_{ij}$  résulte du fait que l'incrément d'énergie élastique par unité de volume  $dW$  d'un corps déformé s'écrit de la façon suivante (Nye, 1957):

$$dW = \sum_{(j=1 \rightarrow 6)} \sigma_j \cdot d\varepsilon_j$$

Avec:

$$\sigma_i = \partial W / \partial \varepsilon_i \text{ et } \sigma_j = \partial W / \partial \varepsilon_j \rightarrow \partial \sigma_i / \partial \varepsilon_j = \partial \sigma_j / \partial \varepsilon_i \text{ ou } C_{ij} = C_{ji}$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 2. Déformation, contrainte et la loi de Hooke :

\* Le dernier résultat signifie que les éléments hors diagonale de la matrice  $C_{ij}$  sont égaux par paires, de sorte que la matrice est symétrique. Donc les 36 constantes de rigidité sont ainsi réduites à 21.

\* Des relations similaires existent pour les modules de complaisance  $S_{ij}$ .

\* Le module de masse  $K$  d'un matériau (ou sa réciproque, la compressibilité) peut facilement être exprimé en termes de coefficients  $S_{ij}$  ou  $C_{ij}$ :

$$K \equiv -P/(\Delta V/V)$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 2. Déformation, contrainte et la loi de Hooke :

Avec:

$\Delta V/V$ : La dilatation ( $\Delta V/V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ )

$P$ : La pression hydrostatique ( $P = -\sigma_1 = -\sigma_2 = -\sigma_3$ )

D'où on obtient la relation suivante:

$$K^{-1} = S_{11} + S_{22} + S_{33} + 2(S_{12} + S_{23} + S_{31})$$

\* Il est parfois nécessaire de distinguer les modules mesurés en adiabatique (à entropie constante) ou en isotherme (à température constante).

\* En fait, les mesures quasi-statiques donnent généralement les constantes isothermes, tandis que les mesures dynamiques à haute fréquence donnent les constantes adiabatiques.



# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 2. Déformation, contrainte et la loi de Hooke :

\* La différence entre les constantes de complaisance adiabatique et isotherme est obtenue à partir des deux équations:

$$\begin{aligned}(\partial \varepsilon / \partial \sigma)_{\xi, S} &= (\partial \varepsilon / \partial \sigma)_{\xi, T} + (\partial \varepsilon / \partial T)_{\xi, \sigma} \cdot (\partial T / \partial \sigma)_{\xi, S} \\ J_{U; S} &= J_{U; T} - \alpha^2 \cdot T_0 / c_{\sigma}\end{aligned}$$

Pour obtenir l'équation généralisé suivante:

$$[S_{ij}]_{s(\text{Entropie constante})} = [S_{ij}]_{T(\text{Température constante})} - \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot T / c_{\sigma}$$

Avec:

$$\alpha_i \equiv (\partial \varepsilon_i / \partial T)_{\sigma}$$

\* Cette différence est généralement faible, de l'ordre de 1%, mais pour certains types d'anélasticité, cette différence devient importante

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 3. Les constantes élastiques caractéristiques:

- \* Il est important de réaliser que la matrice entière des coefficients ( $s_{ij}$ ) ou ( $c_{ij}$ ) change à mesure que l'orientation des axes de coordonnées pour la contrainte et la déformation change par rapport aux axes de symétrie cristalline.
- \* Les constantes élastiques d'un cristal dans son orientation standard sont appelées les constantes caractéristiques du matériau.
- \* Dorénavant, nous utiliserons les symboles majuscules  $C_{ij}$  et  $S_{ij}$  pour désigner ces constantes caractéristiques.
- \* À titre d'illustration, nous donnerons quelques exemples de la forme des matrices pour les cristaux de symétrie supérieure.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 3. Les constantes élastiques caractéristiques:

\* **Tétragonal**: Avec un axe  $Ox_3$  parallèle à l'axe tétragonal, la matrice  $(S_{ij})$  prend la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{44} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{pmatrix}$$

\* Même écriture pour la matrice  $(C_{ij})$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 3. Les constantes élastiques caractéristiques:

\* **Hexagonal:** avec un axe  $Ox_3$  parallèle à l'axe hexagonal, la matrice  $(S_{ij})$  prend la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{44} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix}$$

Avec:

$$S_{66} = 2(S_{11} - S_{12}) \text{ ou } C_{66} = (1/2)(C_{11} - C_{12})$$

Ou il n'y a que cinq constantes élastiques indépendantes.



# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 3. Les constantes élastiques caractéristiques:

\* **Trigonal**: avec un axe  $Ox_3$  parallèle à l'axe trigonal, la matrice  $(S_{ij})$  prend la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{44} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{pmatrix}$$

Avec:

$$S_{14} = -S_{15} = (1/2)(S_{56}) \text{ ou } C_{14} = -C_{15} = C_{56}$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 3. Les constantes élastiques caractéristiques:

\* **Cubique**: avec des axes ( $Ox_1, Ox_2, Ox_3$ ) qui coïncident avec les trois axes du cube, la matrice ( $S_{ij}$ ) prend la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{44} & 0 \\ & & & & & S_{44} \end{bmatrix}$$

Ou il n'y a que trois constantes élastiques indépendantes.

\* Même écriture pour la matrice ( $C_{ij}$ )

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 3. Les constantes élastiques caractéristiques:

- \* Pour un cristal arbitrairement orienté par rapport aux axes standards, tous les composants de la matrice sont, en général, non nuls.
- \* Les composantes  $s_{ij}$  de la matrice d'orientation arbitraire peuvent être exprimées en termes de constantes caractéristiques et de cosinus de direction entre les axes de coordonnées et les axes standard.
- \* Les équations de ce type sont données dans de nombreuses références
- \* Il est intéressant de citer les résultats de certains cas particuliers.
- \* Premièrement, nous exprimons **le module de Young** dans une direction arbitraire pour les trois systèmes cristallins de plus haute symétrie en notant que  $E^{-1} = s_{11}$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 3. Les constantes élastiques caractéristiques:

Avec:  $\gamma_1, \gamma_2$  et  $\gamma_3$  sont les cosinus directeurs entre la direction de la déformation et les trois axes cristallins nous avons le module de Young:

**\* Pour le cas tétragonal:**

$$E^{-1} = (\gamma_1^4 + \gamma_2^4) \cdot S_{11} + \gamma_3^4 \cdot S_{33} + \gamma_1^2 \cdot \gamma_2^2 \cdot (2S_{12} + S_{66}) + \gamma_3^2 (1 - \gamma_3^2) \cdot (2S_{13} + S_{44})$$

**\* Pour le cas hexagonal:**

$$E^{-1} = (1 - \gamma_3^2) \cdot S_{11} + \gamma_3^4 \cdot S_{33} + \gamma_3^2 (1 - \gamma_3^2) \cdot (2S_{13} + S_{44})$$

**\* Pour le cas cubique:**

$$E^{-1} = S_{11} - 2[S_{11} - S_{12} - (\frac{1}{2})S_{44}] \cdot (\gamma_1^2 \cdot \gamma_2^2 + \gamma_2^2 \cdot \gamma_3^2 + \gamma_3^2 \cdot \gamma_1^2)$$

On mettons  $\Gamma = (\gamma_1^2 \cdot \gamma_2^2 + \gamma_2^2 \cdot \gamma_3^2 + \gamma_3^2 \cdot \gamma_1^2)$ : Cette quantité varie de zéro (déformation suivant  $\langle 100 \rangle$ ) jusqu'à  $1/3$  (déformation suivant  $\langle 111 \rangle$ )



# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 3. Les constantes élastiques caractéristiques:

\* Une autre quantité intéressante est le module de torsion « G » d'un cristal en forme de tige de section circulaire.

Avec:  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$  sont les cosinus directeurs entre la direction de la déformation et les trois axes cristallins nous avons:

\* **Pour le cas tétragonal:**

$$G^{-1} = (1/2)(\gamma_1^4 + \gamma_2^4) \cdot (S_{44} + S_{66}) + \gamma_3^4 \cdot S_{44} + \gamma_1^2 \cdot \gamma_2^2 \cdot [4(S_{11} - S_{12}) + (S_{44} - S_{66})] + [2(S_{11} + S_{33} - 2S_{13}) + (1/2)(S_{66} - S_{44})] \cdot \gamma_3^2 (1 - \gamma_3^2)$$

\* **Pour le cas hexagonal:**

$$G^{-1} = S_{44} + [S_{11} + S_{12} - (1/2)S_{44}](1 - \gamma_3^2) + 2(S_{11} + S_{33} - 2S_{13} - S_{44}) \cdot \gamma_3^2 (1 - \gamma_3^2)$$

\* **Pour le cas cubique:**

$$G^{-1} = S_{44} + 4[S_{11} - S_{12} - (1/2)S_{44}] \cdot (\gamma_1^2 \cdot \gamma_2^2 + \gamma_2^2 \cdot \gamma_3^2 + \gamma_3^2 \cdot \gamma_1^2)$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 3. Les constantes élastiques caractéristiques:

\* Pour le matériau isotrope, on peut le considérer comme un cas particulier d'un cristal cubique dans lequel E et G sont indépendants de l'orientation cette condition est remplie lorsque:

$$\mathbf{S}_{44} = 2(\mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{12}) \text{ ou bien } \mathbf{C}_{44} = (1/2)(\mathbf{C}_{11} - \mathbf{C}_{12})$$

Ce qui veut dire qu'il n'y a que deux constantes élastiques indépendantes, qui peuvent être considérées comme le module de cisaillement

$$\mathbf{G} = 1/\mathbf{S}_{44}$$

et le module de masse

$$\mathbf{K} = 1/3(\mathbf{S}_{11} - 2\mathbf{S}_{12})$$

Cela implique la relation du module de Young suivante:

$$\mathbf{3/E} = \mathbf{1/G} + \mathbf{1/3K}$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Utilisation des contraintes et déformations symétriques :

\* D'autres simplifications de la loi de Hooke pour les cristaux peuvent être effectuées si, au lieu des composants habituels de contrainte et de déformation, nous choisissons six combinaisons linéaires indépendantes des composants habituels qui possèdent certaines propriétés fondamentales de symétrie associées au cristal en question.

\* Ces combinaisons linéaires, connues sous le nom de coordonnées de symétrie de contrainte ou déformation, ou de contraintes et déformations symétriques, sont obtenues au moyen de la théorie des groupes (Nowick et Heller, 1965).

\* Nous n'essaierons pas de développer ces combinaisons linéaires symétrisées ici, mais nous les avons répertoriées pour les cristaux cubiques, hexagonaux, tétragonaux et trigonaux.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Utilisation des contraintes et déformations symétriques :

- \* Il existe un total de six contraintes symétrisées et six déformations correspondantes répertoriées pour chaque système cristallin.
- \* Ces contraintes et déformations symétrisées sont séparées selon les différentes manières dont elles se transforment sous les opérations de symétrie du cristal.
- \* Ces moyens de transformation sont indiqués par une désignation de symétrie appropriée (A, B, E ou T) donnée dans les tableaux suivants.
- \* Puisqu'une opération de symétrie produit une transformation linéaire des coordonnées, elle prendra, en général, une composante de contrainte (ou déformation) en une combinaison linéaire des six composantes.
- \* Les quantités symétrisées montrent cependant un comportement de transformation beaucoup plus simple.



# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Utilisation des contraintes et déformations symétriques :

Systeme	Type I	Contrainte	Complaisance	Déformation
Cubique	A	$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$	$S_{11} + 2S_{12}$	$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$
Hexagonal Tétraagonal trigonal	A	$(1/2)^{1/2}(\sigma_1 + \sigma_2)$	$S_{11} + S_{12}$	$(1/2)^{1/2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$
	A	$(1/2)^{1/2}(\sigma_1 + \sigma_2)$	$(2)^{1/2}(S_{13})$	$\varepsilon_3$
	A	$\sigma_3$	$(2)^{1/2}(S_{13})$	$(1/2)^{1/2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$
	A	$\sigma_3$	$S_{33}$	$\varepsilon_3$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Utilisation des contraintes et déformations symétriques :

Système	Type II	Contrainte	Complaisance	Déformation
Cubique	E	$2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$	$S_{11} - S_{12}$	$2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3$
	E	$\sigma_2 - \sigma_3$	$S_{11} - S_{12}$	$\varepsilon_2 - \varepsilon_3$
	T ou F	$\sigma_4$	$S_{44}$	$\varepsilon_4$
	T ou F	$\sigma_5$	$S_{44}$	$\varepsilon_5$
	T ou F	$\sigma_6$	$S_{44}$	$\varepsilon_6$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Utilisation des contraintes et déformations symétriques :

Systeme	Type II	Contrainte	Complaisance	Déformation
Hexagonal	$E_1$	$\sigma_4$	$S_{44}$	$\varepsilon_4$
	$E_1$	$\sigma_5$	$S_{44}$	$\varepsilon_5$
	$E_2$	$\sigma_1 - \sigma_2$	$S_{11} - S_{12}$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_2$
	$E_2$	$\sigma_6$	$S_{11} - S_{12}$	$E_6/2$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Utilisation des contraintes et déformations symétriques :

Système	Type II	Contrainte	Complaisance	Déformation
Tétragonal (haute classe de symétrie)	B <sub>1</sub>	$\sigma_1 - \sigma_2$	$S_{11} - S_{12}$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_2$
	B <sub>2</sub>	$\sigma_6$	$S_{44}$	$\varepsilon_6$
	E	$\sigma_4$	$S_{44}$	$\varepsilon_4$
	E	$\sigma_5$	$S_{44}$	$\varepsilon_5$



# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Utilisation des contraintes et déformations symétriques :

Système	Type II	Contrainte	Complaisance	Déformation
	E	$\sigma_4$	$S_{44}$	$\varepsilon_4$
	E	$\sigma_4$	$(2)^{1/2} S_{44}$	$(1/2)^{1/2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$
Trigonal (haute classe de symétrie)	E	$(1/2)^{1/2} (\sigma_1 - \sigma_2)$	$(2)^{1/2} S_{44}$	$\varepsilon_4$
	E	$(1/2)^{1/2} (\sigma_1 - \sigma_2)$	$S_{11} - S_{12}$	$(1/2)^{1/2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$
	E	$\sigma_5$	$S_{44}$	$\varepsilon_5$
	E	$\sigma_5$	$(2)^{1/2} S_{14}$	$(1/2)^{1/2} \varepsilon_6$
	E	$(1/2)^{1/2} \sigma_6$	$(2)^{1/2} S_{14}$	$\varepsilon_5$
	E	$(1/2)^{1/2} \sigma_6$	$S_{11} - S_{12}$	$(1/2)^{1/2} \varepsilon_6$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Utilisation des contraintes et déformations symétriques :

Type de symétrie	Désignation	Définition
Déformation cristalline sous une déformation de type I n'est pas abaissé en symétrie.		
I	A	Symétrie totale (Les combinaisons linéaires de composants de contrainte (ou déformation) sont inchangées en effectuant l'une des opérations de symétrie du cristal)
Déformation cristalline sous une déformation de type II est abaissé en symétrie.		
II	B ( $B_1, B_2$ )	Diminution ou dilatation d'un paramètre
	E	Double déformation
	T ou F	Triple déformation (généralement dans la structure cubique)

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Utilisation des contraintes et déformations symétriques :

\* Pour l'étude de l'anélasticité, il est avantageux de distinguer une des désignations de symétrie de toutes les autres.

Exemple de la symétrie désigné par « A » de type I, dans le cristal tétragonal, une rotation de  $\pi/2$  autour de l'axe tétragonal  $x_3$  donne:

$$x_1 \rightarrow x_2 \text{ et } x_2 \rightarrow -x_1.$$

$$\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \text{ et } \sigma_2 \rightarrow \sigma_1,$$

**mais la combinaison linéaire  $\sigma_1 + \sigma_2$  reste inchangée.**

\* La complaisance mentionné dans le tableau (dite symétrisée) est la quantité qui, multipliée par une contrainte symétrisée, donne la déformation symétrisée correspondante.

\* L'importance des contraintes et déformations symétrisées est la simplification qui se produit dans la loi de Hooke lors de leur utilisation.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Utilisation des contraintes et déformations symétriques :

\* La théorie des groupes qui servent de base à cette simplification peuvent être énoncés en termes simples comme suit:

1- Une contrainte symétrisée et une déformation symétrisée qui appartiennent à différentes désignations de symétrie ne peuvent pas être couplées les unes aux autres, c.-à-d. la constante de conformité relative à une telle contrainte et déformation doit être nulle.

Une conséquence particulière du premier théorème est qu'une contrainte de type I ne peut pas donner lieu à une déformation de type II. Par exemple, dans un cristal cubique, la pression hydrostatique ne donne lieu qu'à un changement de volume mais pas à une distorsion de cisaillement du cristal.



# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Utilisation des contraintes et déformations symétriques :

2- Pour une désignation dégénérée (E ou T), où des contraintes et déformations symétriques se produisent dans des ensembles correspondants (de deux ou trois), les contraintes et déformations correspondantes d'un ensemble donné sont liées par la même constante de complaisance, tandis que celles qui ne correspondent pas ne sont pas couplés les uns aux autres.

Pour illustrer le deuxième théorème, notons que dans les cristaux cubiques sous une désignation de symétrie T, la contrainte  $\sigma_4$  n'est pas couplée aux déformations  $\varepsilon_5$  et  $\varepsilon_6$ . En revanche,  $\varepsilon_4/\sigma_4 = \varepsilon_5/\sigma_5 = \varepsilon_6/\sigma_6 = S_{44}$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Utilisation des contraintes et déformations symétriques :

- \* Chaque fois qu'une contrainte symétrisée est découplée de toutes les déformations symétrisées à l'exception de celle qui lui correspond, la loi de Hooke revient à la forme simple  $\varepsilon = J \cdot \sigma$ .
- \* La complaisance appropriée  $J$  est donnée dans les tableaux en termes de coefficients  $S_{ij}$  pour chacun de ces cas.
- \* Chacune de ces complaisances dans les tableaux peut être vérifiée à l'aide de l'équation ci-dessous en définissant les cinq autres contraintes symétriques égales à zéro:

$$\varepsilon_i = \sum_{(j=1 \rightarrow 6)} S_{ij} \sigma_j \text{ avec } i = 1 \rightarrow 6$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Utilisation des contraintes et déformations symétriques :

Par exemple, pour la déformation hydrostatique dans le cas cubique:

$$\sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_2 - \sigma_3 = 0$$

ce qui implique

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$$

On obtient:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (S_{11} + 2S_{12})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

comme la relation entre la contrainte et la déformation symétrisées de type I.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Utilisation des contraintes et déformations symétriques :

\* Puisque la pression hydrostatique est donnée par:

$$P = - (1/3)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

et le changement de volume par:

$$\Delta V/V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Cela veut dire que le module de compressibilité du cristal est représenté par:

$$3(S_{11} + 2S_{12})$$



# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Utilisation des contraintes et déformations symétriques :

\* On peut avoir un couplage entre différentes contraintes et déformations lorsqu'une désignation de symétrie donnée est répétée. Un exemple de ce type est celui des cristaux hexagonaux, tétragonaux et trigonaux, où il y a deux contraintes symétriques (et deux déformations) de type I.

\* Puisque celles-ci appartiennent à la même désignation de symétrie, ils ne sont pas découplés, mais les composantes hors diagonales dans la matrice des coefficients sont toujours symétriques. En conséquence, il existe trois constantes de complaisance élastique. Dans ce cas, les relations de loi de Hooke appropriées entre les deux contraintes et déformations de type I sont:

$$(1/2)^{1/2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = [(S_{11} + S_{12})(1/2)^{1/2}(\sigma_1 + \sigma_2)] + [(2)^{1/2}(S_{13}) \sigma_3]$$

$$\varepsilon_3 = [(2)^{1/2}(S_{13}) (1/2)^{1/2}(\sigma_1 + \sigma_2)] + [S_{33} \sigma_3]$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Utilisation des contraintes et déformations symétriques :

\* Ainsi, la matrice complète des complaisance symétrisées pour le cas tétragonal prend la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} S_{11} + S_{12} & \sqrt{2}S_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}S_{12} & S_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{11} - S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{66} & 0 & 0 \\ & & & & S_{44} & 0 \\ & & & & & S_{44} \end{pmatrix}$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Utilisation des contraintes et déformations symétriques :

\* Pour résumer, l'utilisation de contraintes et de déformations symétrisées nous amène un long chemin vers le découplage de la relation générale contrainte-déformation (loi de Hooke), en particulier pour les cristaux de symétrie supérieure.

\* Dans le cas cubique, les six contraintes et déformations symétriques sont découplées en relations de la forme  $\varepsilon = J \cdot \sigma$ , tandis que pour les cristaux hexagonaux et tétragonaux, quatre des six contraintes et déformations sont découplées de cette manière.

\* Un autre avantage encore à l'utilisation des quantités symétrisées apparaît par rapport à la différence entre les modules adiabatiques et isothermes

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Utilisation des contraintes et déformations symétriques :

\* La dilatation thermique ne modifie pas la symétrie cristalline, le coefficient de dilatation thermique  $\alpha_i$  ne peut que contribuer à une déformation de type I.

\* Ainsi, la différence entre les constantes de complaisance adiabatiques et isothermes de type II est toujours nulle (voir la relation précédente):

$$[S_{ij}]_{s(\text{Entropie constante})} = [S_{ij}]_{T(\text{Température constante})} - \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot T / c_\sigma$$

\* Pour le cas cubique, la seule constante de complaisance symétrisée qui montre une différence est la compressibilité  $3(S_{11} + 2S_{12})$ . Dans ce cas, comme le coefficient de dilatation thermique linéaire  $\alpha$  est le même dans toutes les directions, nous avons:

$$3[(S_{11} + 2S_{12})]_s = 3[(S_{11} + 2S_{12})]_T - 9\alpha^2 \cdot T / c_\sigma$$



# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Utilisation des contraintes et déformations symétriques :

\* Les contraintes symétrisées en termes de déformations symétrisées s'écrivent via les coefficients  $C_{ij}$  avec les mêmes indices que les complaisances correspondantes qui apparaissent dans les tableaux. Cela conduit à des relations particulièrement simples chaque fois que le découplage contrainte-déformation se produit et que le module approprié est l'inverse du correspondant tel que:

Cubique:

$$(S_{11} + 2S_{12})^{-1} = (C_{11} + 2C_{12}), (S_{11} - 2S_{12})^{-1} = (C_{11} - 2C_{12}), S_{44} = C_{44}$$

Hexagonal et tétragonal:

$$(S_{11} - 2S_{12})^{-1} = (C_{11} - 2C_{12}), 1/S_{44} = C_{44}$$

Et un plus pour le tétragonal:

$$1/S_{66} = C_{66}$$

\* Lorsqu'il existe des équations couplées, l'inversion donne une relation plus complexe entre les coefficients  $C_{ij}$  et  $S_{ij}$ .

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Les modules « pratiques »:

\* D'un point de vue pratique, il est difficile d'appliquer les systèmes de contraintes théoriques simples à un échantillon réel. Par exemple, il est difficile d'exciter un cristal cubique à des oscillations dans lesquelles le système de contraintes n'est constitué que de la contrainte  $\sigma_4$ , ou seulement de  $\sigma_1 = -\sigma_2$ .

\* Pour les méthodes dynamiques statiques ou de type résonnant, les constantes élastiques "pratiques" sont les modules de Young (E) et de torsion (G) tandis que pour les méthodes de propagation des ondes, les modules pratiques sont ceux obtenus à partir des vitesses sonores longitudinales et transversales. Pour un cristal orienté dans une direction arbitraire, certains modules pratiques impliquent tout ou plusieurs des complaisances symétrisées.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Les modules « pratiques »:

- \* En revanche, avec un choix judicieux d'orientation cristalline, les modules pratiques prennent des formes très simplifiées. Il est donc important de connaître les relations entre les modules pratiques et les complaisances symétrisées ou constantes de rigidité.
- \* Les expériences pour lesquelles le module pratique est lié à une seule constante symétrisée ou à pas plus d'une constante symétrisée de type I et de type II sont d'une importance particulière pour l'anélasticité.
- \* Les relations qui satisfont à cette exigence sont énumérées ci-dessous pour les quatre systèmes cristallins de symétrie la plus élevée.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Les modules « pratiques »:

\* Les méthodes dynamiques statiques ou de type résonnant:

Les constantes élastiques "pratiques" sont les modules de Young ( $E$ ) et de torsion ( $G$ )

\* Les méthodes de propagation des ondes:

Les modules pratiques sont ceux obtenus à partir des vitesses sonores longitudinales et transversales.

\* Pour un cristal orienté dans une direction arbitraire, certains modules pratiques impliquent tout ou plusieurs des complaisances symétrisées. Pour les ondes transversales, un exposant est également utilisé pour donner la direction de polarisation, lorsque cette direction doit être spécifiée

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Les modules « pratiques »:

Notations	Descriptions
$v_t$	Vitesse transversale
$v_l$	Vitesse longitudinale
$\rho$	La densité
$\langle hkl \rangle$	Cette indice fait référence à l'orientation de l'axe du spécimen pour les modules E et G, et à la direction de propagation des ondes pour les mesures de vitesse



# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Les modules « pratiques »:

\* Cubique:

$$E_{\langle 100 \rangle}^{-1} = S_{11} = \frac{1}{3}[(S_{11} + 2S_{12}) + 2(S_{11} - S_{12})]$$

$$E_{\langle 111 \rangle}^{-1} = \frac{1}{3}[(S_{11} + 2S_{12}) + S_{44}]$$

$$G_{\langle 100 \rangle}^{-1} = S_{44}$$

$$(v_l^2 \rho)_{\langle 100 \rangle} = C_{11} = \frac{1}{3}[(C_{11} + 2C_{12}) + 2(C_{11} - C_{12})]$$

$$(v_t^2 \rho)_{\langle 100 \rangle} = (v_t^2 \rho)_{[110]}^{[001]} = C_{44}$$

$$(v_t^2 \rho)_{[110]}^{[1\bar{1}0]} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$$

$$(v_l^2 \rho)_{\langle 111 \rangle} = \frac{1}{3}[(C_{11} + 2C_{12}) + 4C_{44}]$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Les modules « pratiques »:

\* Hexagonal:

$$E_{[001]}^{-1} = S_{33}$$

$$E_{[hk0]}^{-1} = S_{11} = \frac{1}{2} [(S_{11} + S_{12}) + (S_{11} - S_{12})]$$

$$G_{[001]}^{-1} = S_{44}$$

$$(v_l^2 \rho)_{[001]} = C_{33}$$

$$(v_t^2 \rho)_{[001]} = C_{44}$$

$$(v_l^2 \rho)_{[hk0]} = C_{11} = \frac{1}{2} [(C_{11} + C_{12}) + (C_{11} - C_{12})]$$

$$(v_t^2 \rho)_{[hk0]}^{[k\bar{h}0]} = \frac{1}{2} (C_{11} - C_{12})$$

$$(v_t^2 \rho)_{[hk0]}^{[001]} = C_{44}$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Les modules « pratiques »:

\* Tétragonal:

$$E_{[001]}^{-1} = S_{33}$$

$$E_{\langle 100 \rangle}^{-1} = S_{11} = \frac{1}{2}[(S_{11} + S_{12}) + (S_{11} - S_{12})]$$

$$E_{\langle 110 \rangle}^{-1} = \frac{1}{2}[(S_{11} + S_{12}) + \frac{1}{2}S_{66}]$$

$$G_{[001]}^{-1} = S_{44}$$

$$(v_l^2 \rho)_{[001]} = C_{33}$$

$$(v_t^2 \rho)_{[001]} = C_{44}$$

$$(v_l^2 \rho)_{\langle 100 \rangle} = C_{11} = \frac{1}{2}[(C_{11} + C_{12}) + (C_{11} - C_{12})]$$

$$(v_t^2 \rho)_{\begin{smallmatrix} [010] \\ [100] \end{smallmatrix}} = C_{66}$$

$$(v_t^2 \rho)_{\begin{smallmatrix} [001] \\ [100] \end{smallmatrix}} = (v_t^2 \rho)_{\begin{smallmatrix} [001] \\ [110] \end{smallmatrix}} = C_{44}$$

$$(v_l^2 \rho)_{\langle 110 \rangle} = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12}) + C_{66}$$

$$(v_t^2 \rho)_{\begin{smallmatrix} [1\bar{1}0] \\ [110] \end{smallmatrix}} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Les modules « pratiques »:

\* Trigonal:

$$E_{[001]}^{-1} = S_{33}$$

$$E_{[hk0]}^{-1} = S_{11} = \frac{1}{2}[(S_{11} + S_{12}) + (S_{11} - S_{12})]$$

$$G_{[001]}^{-1} = S_{44}$$

$$(v_l^2 \rho)_{[001]} = C_{33}$$

$$(v_t^2 \rho)_{[001]} = C_{44}$$

$$(v_l^2 \rho)_{[100]} = C_{11} = \frac{1}{2}[(C_{11} + C_{12}) + (C_{11} - C_{12})]$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Les modules « pratiques »:

\* Il y aura des circonstances, bien sûr, où les cristaux dans les orientations spéciales requises pour mesurer ces modules pratiques les plus simples ne seront pas disponibles. Il peut alors être nécessaire de travailler à partir d'équations plus générales impliquant, en général, toutes les constantes symétrisées.

\* Il faut noter aussi que pour les méthodes de propagation des ondes, il existe une complication analogue pour les cristaux d'orientation arbitraire, à savoir que dans de telles situations, un transducteur ne génère pas une onde pure (c'est-à-dire une onde longitudinale ou une onde transversale d'une polarisation définie).



# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 4. Les modules « pratiques »:

\* Il convient toutefois de noter que toutes les constantes symétrisées ne sont pas représentées dans les équations précédentes. Plus précisément, pour les cristaux hexagonaux, tétragonaux et trigonaux, la complaisance  $S_{13}$  ne peut pas être obtenue au moyen des mesures énumérées.

\* Pour l'anélasticité, cependant, nous verrons que la mesure de  $S_{13}$  n'est pas très importante, car les autres complaisances de type I donnent essentiellement les informations requises.

\* Des remarques similaires s'appliquent à la conformité  $S_{14}$  dans les cristaux trigonaux.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 5. Transition de l'élasticité à l'anélasticité:

\* Afin de généraliser les équations d'élasticité d'un cristal, telles que données par:

$$\sigma_i = \sum_{(j=1 \rightarrow 6)} C_{ij} \varepsilon_j \text{ avec } i = 1 \rightarrow 6 \text{ et } \varepsilon_i = \sum_{(j=1 \rightarrow 6)} S_{ij} \sigma_j \text{ avec } i = 1 \rightarrow 6$$

pour permettre des effets dépendant du temps, on peut utiliser n'importe laquelle des approches utilisées dans les chapitres précédents.

\* Ainsi, il est possible d'introduire des dérivées temporelles pour chacune des composantes de contrainte et de déformation, à la manière de l'équation ci-dessous comme première méthode:

$$a_0 \sigma + a_1 \sigma' + a_2 \sigma'' + a_3 \sigma''' + \dots = b_0 \varepsilon + b_1 \varepsilon' + b_2 \varepsilon'' + b_3 \varepsilon''' + \dots$$

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 5. Transition de l'élasticité à l'anélasticité:

\* Une deuxième méthode serait de généraliser la relation de Boltzmann (principe de superposition) dans le cas continu:

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t - t') \frac{d\sigma(t')}{dt'} dt'$$

et les autres équations intégrales qui en découlent, pour tenir compte de l'existence de six composantes de contrainte et de déformation.

\* Compte tenu de la relative simplicité conceptuelle de la formulation de l'anélasticité en termes de spectres de relaxation, ainsi que de son interprétation en termes de variables internes, nous avons choisi de baser notre formulation de l'anélasticité anisotrope sur cette approche. Les résultats d'autres formulations peuvent, bien entendu, être dérivés de celui qui sera utilisé ici.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 5. Transition de l'élasticité à l'anélasticité:

\* En passant des équations d'élasticité anisotrope à celles d'anélasticité, chacune des quantités  $s_{ij}$  (ainsi que la  $c_{ij}$ ) doit devenir fonction du temps pour les expériences quasi-statiques et devenir complexe et dépendante de la fréquence,  $s^*(\omega)$ , pour les expériences dynamiques.

\* Ainsi, chaque constante de complaisance variera désormais entre les valeurs extrêmes  $s_u$  et  $s_R$ , où  $s_u$  est la valeur de  $s(t)$  pour  $t \rightarrow 0$  ou la valeur de  $s^*(\omega)$  pour  $\omega \rightarrow \infty$ .

\* Tandis que de la même manière,  $s_R = s(t \rightarrow \infty) = s^*(t = 0)$ . Les constantes caractéristiques  $S_{ij}$  et  $C_{ij}$  vont dans les fonctions de réponse caractéristiques.

\* Il est utile de noter que toutes les relations d'élasticité anisotrope doivent être valables aussi bien dans la limite de relaxation nulle ( $t \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow \infty$ ) et dans la limite de la relaxation complète ( $t \rightarrow \infty$ ,  $\omega \rightarrow 0$ ).



# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 5. Transition de l'élasticité à l'anélasticité:

- \* Autrement dit, un cristal anélastique redevient un cristal élastique à la fois lorsqu'il n'est pas détendu et lorsqu'il est complètement détendu.
- \* Ainsi, suivant notre notation précédente, les équations des sections précédentes s'appliquent à un cristal anélastique soit avec un indice U ou avec l'indice R tout au long.
- \* De plus, si  $\delta s \equiv s_R - s_u$ , l'amplitude de la relaxation de toute complaisance élastique peut être obtenue à partir des équations d'élasticité en prenant les différences entre les quantités relaxées et non relaxées, c'est-à-dire en introduisant le symbole  $\delta$  avant chaque complaisance.



# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 5. Transition de l'élasticité à l'anélasticité:

\* Exemple, Crystal cubique: on mettons  $\Gamma = (\gamma_1^2 \cdot \gamma_2^2 + \gamma_2^2 \cdot \gamma_3^2 + \gamma_3^2 \cdot \gamma_1^2)$

Les relations:

$$\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{S}_{11} - 2[\mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{12} - (1/2)\mathbf{S}_{44}] \cdot \Gamma$$

$$\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{S}_{44} - 4[\mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{12} - (1/2)\mathbf{S}_{44}] \cdot \Gamma$$

Deviennent:

$$\delta \mathbf{E}^{-1} \equiv \delta \mathbf{J}_{\mathbf{E}} = \delta \mathbf{S}_{11} - 2[\delta(\mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{12}) - (1/2)\delta \mathbf{S}_{44}] \cdot \Gamma$$

$$\delta \mathbf{G}^{-1} \equiv \delta \mathbf{J}_{\mathbf{G}} = \delta \mathbf{S}_{44} + 4[\delta(\mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{12}) - (1/2)\delta \mathbf{S}_{44}] \cdot \Gamma$$

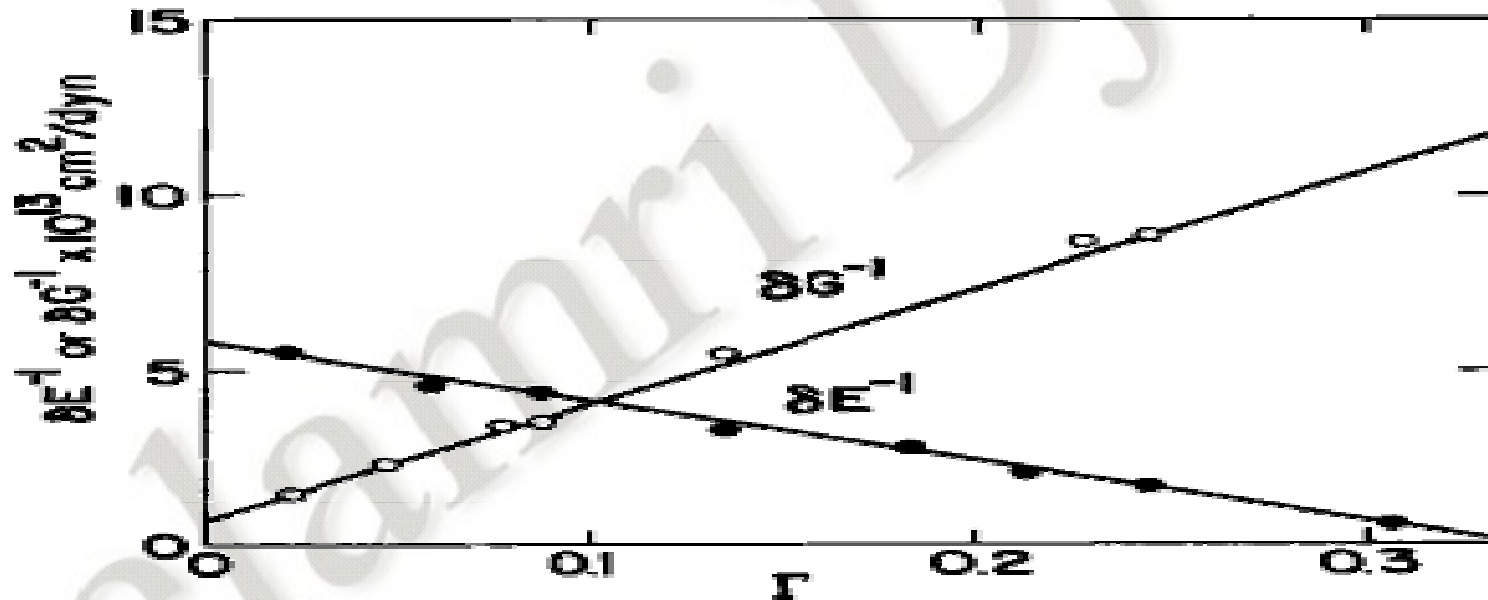
Puisque ces relations découlent de la théorie formelle et n'impliquent aucune hypothèse au-delà d'une connaissance de la symétrie cristalline, elles doivent s'appliquer dans tous les cas.

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 5. Transition de l'élasticité à l'anélasticité:

\* Par conséquent, la mesure dans laquelle ces relations sont respectées peut être utilisée pour vérifier la cohérence interne d'un ensemble d'expériences. Un exemple expérimental (figure 15)



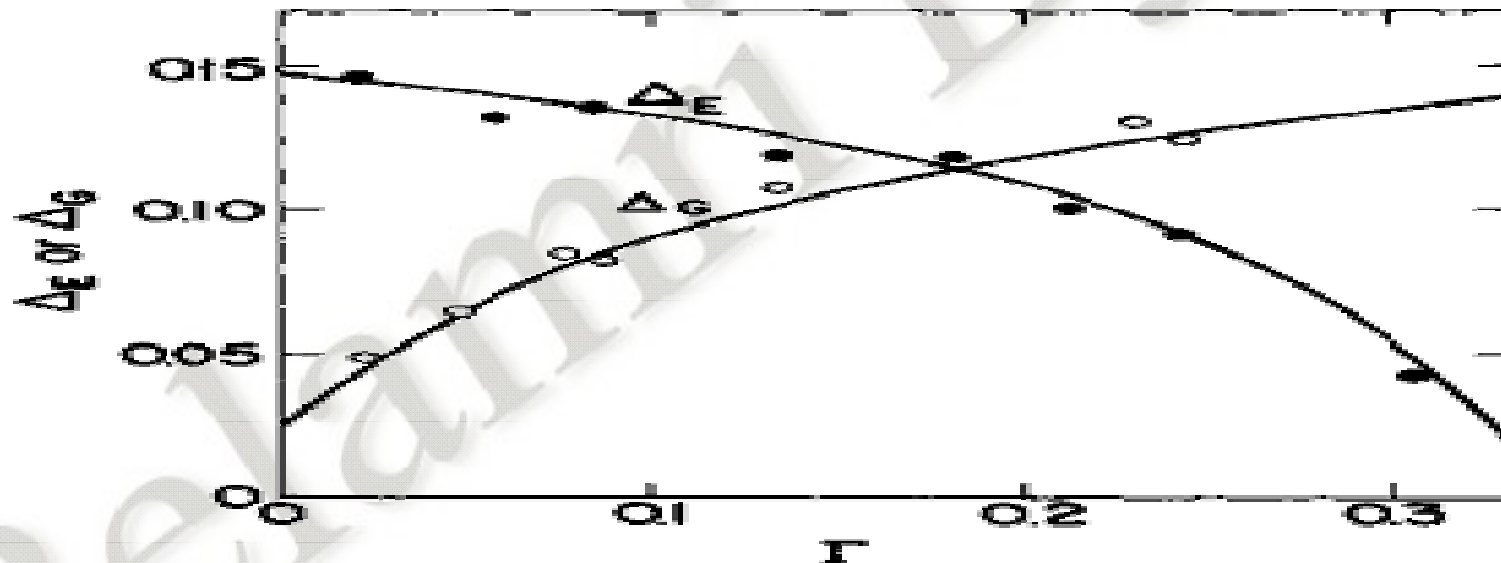
**Figure 15** Dépendance de l'orientation des relaxations du module d'Young réciproque et du module de torsion pour l'alliage Ag-26 à % Zn à 350°C. (D'après Seraphim et Nowick, 1961).

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 5. Transition de l'élasticité à l'anélasticité:

\* De toute évidence, les expressions résultantes ne sont pas, en général, des fonctions linéaires du facteur d'orientation. Un exemple est montré sur la figure 15 qui trace les données ( $\Delta = \delta J/J_U$ ) de force de relaxation pour les mêmes échantillons qui ont été utilisés pour la figure précédente.



**Figure 16** Dépendance de l'orientation des forces de relaxation pour le même alliage que dans la figure 15

# Propriétés Physique de la matière condensée 1

## V. Elasticité et anélasticité anisotrope

### 5. Transition de l'élasticité à l'anélasticité:

\* Les deux équations ( $\delta E^{-1} \equiv \delta J_E$ ) et ( $\delta G^{-1} \equiv \delta J_G$ ) donnent les amplitudes des relaxations pour le cas des cristaux cubiques. Des considérations similaires peuvent être appliquées à d'autres systèmes cristallins. En particulier, toute équation exprimant une constante élastique ou de complaisance particulière en termes de constantes caractéristiques peut être convertie à de différents équations impliquant les constantes relaxées et non relaxées .

\* Lorsque le découplage complet ne se produit pas, la situation est plus complexe. Alors, en général, il y aura autant de spectres de relaxation à contrainte constante qu'il y a de complaisances indépendantes et symétriques. Pour examiner ce cas en détail, il est utile d'invoquer le point de vue thermodynamique et l'introduction de coordonnées internes. En utilisant cette approche dans la section suivante, nous tirerons à nouveau grand profit des considérations de symétrie.