Stabilité des systèmes linéaires

1. INTRODUCTION

La notion de stabilité est très importante en automatique. Les systèmes ne vérifiant pas cette qualité sont inutilisables voire dangereux. Par une formulation simple, on définit la stabilité par l'une des propositions suivantes: un système linéaire est stable:

- Lorsque sa réponse à un échelon prend une valeur finie en régime permanent, ou
- Lorsque sa réponse à une impulsion tend vers 0, ou
- Lorsque sa réponse à une sinusoïde est une sinusoïde de même fréquence et d'amplitude finie.

2. ANALYSE DE LA STABILITE

La stabilité de l'état est conditionnée par celle de la matrice de transition e^{At}. Effet, d'après la solution de l'équation homogène $x(t) = e^{At}x_0$ tend vers 0 quelle que la condition initiale si e^{At} tend vers 0 quand t tend vers l'infini. En examinant le lieu entre les matrices [A, B, C D] et la fonction de transfert du système, on remarque que les pôles de cette dernière ne sont autres que les valeurs propres de A. on retient donc que e^{At} converge si et seulement si les valeurs propres de la matrice A sont à partie réelle strictement négative.

Exemple:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow pI - A = \begin{bmatrix} p+1 & -1 \\ 0 & p+2 \end{bmatrix} \rightarrow [pI - A]^{-1} = \frac{1}{(p+1)(p+2)} \begin{bmatrix} p+2 & 1 \\ 0 & p+1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{p+1} & \frac{1}{(p+1)(p+2)} \\ 0 & \frac{1}{p+2} \end{bmatrix}$$

D'après la table de la transformée de Laplace, on a

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

La matrice d'état A possède deux valeurs propres strictement négatives $\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2$. Le système dont cette matrice est lui associé, est un système stable.

Remarque:

- **Cette méthode s'applique dans tous les cas, c'est à dire quelle que soit la structure de la matrice.**
- **On doit vérifier systématiquement que $\left. e^{At} \right|_{t=0} = I$**

2.1. Analyse du régime transitoire et permanent.

La matrice d'état permet de renseigner non seulement sur la stabilité d'un système, mais aussi sur sa dynamique et donc sur le régime transitoire.

2.1.1. Analyse transitoire

On peut prévoir la forme du régime transitoire et évaluer sa durée à partir de la connaissance des valeurs propre. Par analogie avec les pôles de la fonction de transfert, on peut conclure avec certitude que:

- **Si les valeurs propres sont réelles et strictement négatives: réponse transitoire apériodique.**
- **Si parmi les valeurs propres il y'en a qui sont complexes et à partie réelle strictement négative: réponse transitoire oscillatoire amortie.**
- **Si la matrice d'état possède à la fois des valeurs propres réelles strictement négatives et des valeurs propres complexes à partie réelle strictement négative: la forme du régime transitoire est caractérisé par les valeurs propres dominantes.**

2.1.2. Analyse statique

Pour une entrée constante U_0, c'est-à-dire de type échelon, il s'établit un comportement statique ou toutes les variables d'état et de sortie atteignent des valeurs finales constantes. Sous réserve de la stabilité du système.

L'état su système converge vers l'état final qui peut être déterminé à partir du gain statique. Celui-ci s'obtient en mettant p=0dans la fonction de transfert, ce qui se traduit par la relation suivante:

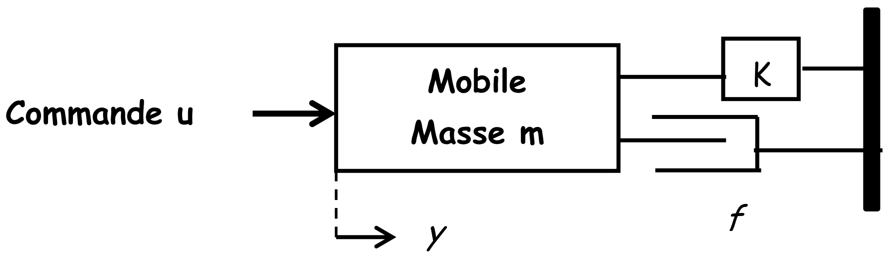
$$K_s = H(p)|_{p=0} = C[pI - A]^{-1}B + D|_{p=0} = -CA^{-1}B + D$$

L'état et la sortie en régime statique s'obtiennent par:

$$\boxed{\begin{array}{c} \lim_{t\to\infty} x(t) = -A^{-1}Bu_0 \\ \lim_{t\to\infty} y(t) = \left[-CA^{-1}B + D\right]u_0 \end{array}}$$

Exemple d'application

On considère le système mécanique suivant:



K:coefficient de raideur=6(USI)

F: coefficient de frottement=5(USI)

M: masse du mobile=1(USI)

Ce système est régi par l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{f}{m}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{k}{m}y(t) = \frac{1}{m}u(t)$$

Afin d'obtenir une représentation d'état possible, on fait le choix classique suivant:

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{f}{m}x_1(t) + \dfrac{k}{m}x_2(t) + \dfrac{1}{m}u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

La fonction de transfert est donnée par:

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = C[pI - A]^{-1}B + D = C[pI - A]^{-1}B$$

$$[pI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 6 & p+5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{p^2 + 5p + 6} \begin{bmatrix} p+5 & 1 \\ -6 & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p+5}{(p+2)(p+3)} & \frac{1}{(p+2)(p+3)} \\ \frac{-6}{(p+2)(p+3)} & \frac{p}{(p+2)(p+3)} \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = H(p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{p+5}{(p+2)(p+3)} & \frac{1}{(p+2)(p+3)} \\ \frac{-6}{(p+2)(p+3)} & \frac{p}{(p+2)(p+3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(p+2)(p+3)}$$

Le gain statique est $K_{s=1/6}$.

- **Analyse de stabilité**

Les valeurs propres de la matrices A, solutions de l'équation caractéristique $det[pI - A] = p^2 + 5p + 6 = 0$, sont données par $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$. Ces valeurs propres sont réelles et négatives, il s'ensuit que le système est de nature stable. On note que les valeurs propres sont aussi les pôles de la fonction de transfert.

- **Calcul de la réponse transitoire**

Pour des conditions initiales nulles et pour une entrée de type échelon unité, la solution x(t) s'écrit:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

On commence par calculer la matrice de transition e^{At} par la méthode de la transformée de Laplace:

$$e^{At} = TL^{-1}[[pI - A]^{-1}] = TL^{-1}\left(\begin{bmatrix} \frac{p+5}{(p+2)(p+3)} & \frac{1}{(p+2)(p+3)} \\ \frac{-6}{(p+2)(p+3)} & \frac{p}{(p+2)(p+3)} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} * & e^{-2t} - e^{-3t} \\ * & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Les éléments marqués (*) n'interviennent pas dans le calcul de la solution compte tenu du zéro dans la matrice B.

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} * & e^{-2t} - e^{-3t} \\ * & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau$$

$$x(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)} \\ -2e^{-2(t-\tau)} + 3e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{-3t} + \frac{1}{6} \\ e^{-2t} - e^{-3t} \end{bmatrix}$$

On déduit le résultat final suivant:

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to \infty} y(t) = \lim\limits_{t \to \infty} x_1(t) = \frac{1}{6} \\ \lim\limits_{t \to \infty} \frac{dy(t)}{dt} = \lim\limits_{t \to \infty} x_2(t) = 0 \end{cases}$$