Commande par retour d'état

1. INTRODUCTION

La commande par retour d'état est à la commande des systèmes modélisés par leur représentation d'état, ce que la boucle fermée est aux systèmes représentés par une fonction de transfert. L'idée consiste toujours à piloter le système par un signal de consigne et à générer automatiquement le signal de commande en confrontant en permanence la valeur de la consigne et le comportement réel du système. L'écart entre consigne et comportement réel sert de base au signal de commande du système. Dans la commande par retour d'état, nous n'allons pas mesurer le signal de sortie pour le boucler sur l'entrée, mais nous allons nous servir du vecteur d'état complet pour prendre connaissance du comportement du système. (La figure.1) présente une représentation schématique de ce concept.

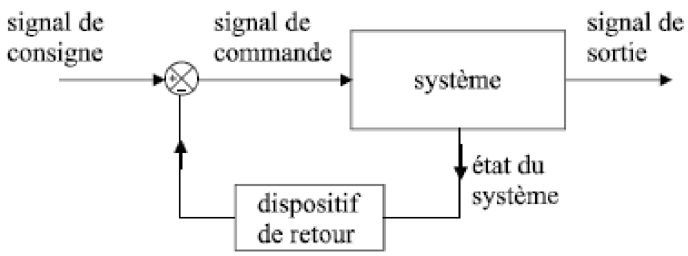

Figure.1 Principe du retour d'état

2. CAS DES SYSTEMES MONO VARIABLES

Considérons un système mono variable linéaire et stationnaire représenté par le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A * x(t) + B * u(t) & \text{Equation d'état} \\ y(t) = C * x(t) + Du(t) & \textit{Equation de mesure} \end{cases}$$

2.1 Commandabilité

Un système décrit par un modèle d'état est dit *commandable* si pour tout état x_f du vecteur d'état, il existe un signal d'entrée $u(t)$ d'énergie finie qui permet au système de passer de l'état initial x_0 à l'état x_f en un temps fini.

Un système est dit *complètement commandable* s'il est commandable à tout point de l'espace d'état.

Donc l'étude de la commandabilité ne dépend que des matrices A et B. Pour cette raison, on dit parfois que c'est la paire (A,B) qui est commandable.

> ***Théorème 1 : Critère de commandabilité de Kalman***
>
> Un système linéaire est complètement commandable si et seulement si : $rang[Q_c] = n$, c-à-d, Q_c est régulière où n est l'ordre du système (nombre de variables d'état) et $Q_c = [B \quad AB \quad A^2B \dots A^{n-2}B \quad A^{n-1}B]$ (1)
>
> Est dite matrice de commandabilité

Exemple 1:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

rang (A)=2

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$Q_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(Q_c) = 2 \neq 0$$

rang (Q_c)=rang (A)=2

Le système est commandable

Exemple 2:

Etudier la commandabilité du système suivant:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \alpha & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

rang (A)=2

$$y(t) = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$Q_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \alpha - 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(Q_c) = \alpha - 3$$

rang (Q_c)=rang (A)=2

On conclure que le système est commandable ssi $\alpha \neq 3$

Exemple 3:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} u(t)$$

rang (A)=2

$$y(t) = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$Q_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(Q_c) = 0$$

rang (Q_c)=rang (A)=2

Le système n'est pas commandable

3. CONCEPTION DU REGULATEUR PAR RETOUR D'ETAT

La conception du régulateur dans l'espace d'état permet de spécifier les pôles d'un système, pour obtenir la réponse temporelle voulue. Cependant, elle ne permet pas de spécifier les zéros d'un système ; c'est un désavantage, puisque les zéros peuvent modifier la réponse transitoire.

Pour un système ayant une fonction de transfert dont l'équation caractéristique est de la forme :

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_A p + a_0 = 0$$

Les solutions de cette équation déterminent les pôles du système qui décrivent la dynamique de ce dernier. Pour modifier la réponse, il faut trouver ***n*** paramètres ajustables ceci revient à changer la position des pôles par changement des coefficients a_i En introduisant les paramètres K_i dans l'équation caractéristique, elle devient de la forme :

$$p^n + (k_{n-1} + a_{n-1})p^{n-1} + \cdots + (k_1 + a_1)p + (k_0 + a_0) = 0 \qquad (2)$$

Cette équation détermine les nouveaux pôles du système en boucle fermée dont les positions peuvent être ajustées en choisissant convenablement les K_i

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A * x(t) + B * u(t) \\ y(t) = C * x(t) + Du(t) \end{cases}$$

La loi de commande par retour d'état est définie par

$$u = -Kx + r = [-K_1 \quad -K_2 \quad -K_3 \dots K_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + r \quad (3)$$

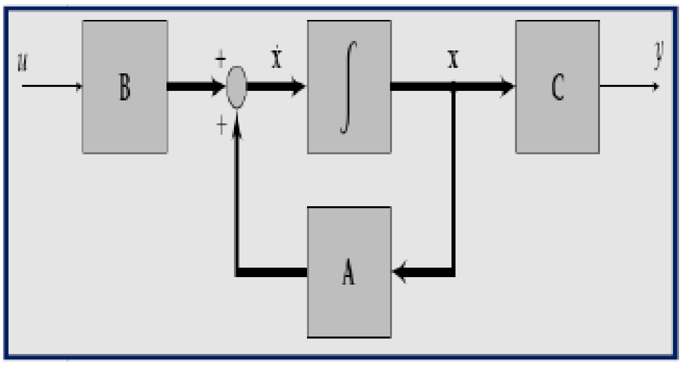

Figure 1 : Représentation d'un système en espace d'état sans retour d'état

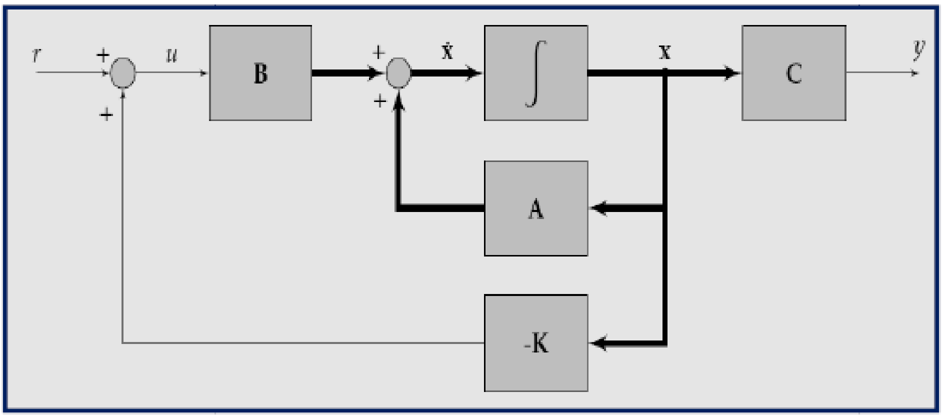

Figure 2: Représentation d'un système en espace d'état avec retour d'état

Les équations d'état du système en boucle fermée s'écrivent

$$\begin{cases} \dot{x} = A * x + B * u \quad = \mathrm{A}x + B(-Kx + r)x + Br \\ y = C * x + Du \end{cases} \quad (4)$$

Note:

- Les représentations d'état sous forme des variables de phases et canonique de commande avec des matrices d'état sous la forme compagne inferieure ou supérieure sont mieux adaptées pour illustrer le concept.
- Pour la synthèse du réglage par retour d'état représenté sous ces deux formes, il est recommandé d'effectuer la transformation, effectuer la synthèse des représentations de départ.

4. LA METHODOLOGIE DE PLACEMENT DES POLES

Pour appliquer la méthode de design par placement de pôles, on utilise les étapes suivantes :

1. Représenter le système sous la forme de variable de phase.
2. Former les retours des variables d'état vers l'entrée à travers les K_i.
3. Former l'équation caractéristique du système en boucle fermée obtenue en 2.
4. Former l'équation caractéristique désirée à partir des pôles désirés.
5. Egaliser les coefficients par identification des deux équations caractéristiques les K_i.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique est donnée par :

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_A p + a_0 = 0$$

Former le système en boucle fermée avec $u = -Kx$

On a :

$$(A - B\,K) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ & & \cdots & & \\ -a_0 - k_0 & -a_1 - k_1 & & -a_{n-2} - k_{n-2} & -a_{n-1} - k_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

L'équation caractéristique correspondante est :

$$p^n + (a_{n-1}+k_{n-1})p^{n-1} + \cdots + (a_1 + k_1)p + (a_0 + k_0) = 0 \quad (6)$$

Sachant que l'équation désirée est donnée par :

$$p^n + d_{n-1}p^{n-1} + \cdots + d_1 p + d_0 = 0 \quad (7)$$

En identifiant les deux équations caractéristiques (6) et (7)on obtient les coefficients K_i du régulateur soient :

$$d_i = a_i + k_i \qquad i = 0,1,2,\ldots,n$$

Exemple 3

Soit le système du 2éme ordre non amorti

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Système en $-2\omega_0^2$(doubler la fréquence naturelle et augmenter ζ de 0 à 1

L'équation désirée

$$p^2 + 4\omega_0 p + 4\omega_0^2 = 0$$

L'équation du système avec régulateur

$$\det(pI - (A - BK)) = det\left\{\begin{bmatrix} p & p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [K_1 \quad K_2]\right)\right\}$$

$$p^2 + K_2 p + \omega_0^2 + K_1 = 0$$

En égalisant

$$\begin{cases} K_2 = 4\omega_0 \\ \omega_0^2 + K_1 = 4\omega_0^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_2 = 4\omega_0 \\ K_1 = 3\omega_0^2 \end{cases}$$

La loi de commande est donnée par

$$u = -Kx = -[3\omega_0^2 \quad 4\omega_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Exemple 4

Soit le système du 2ème ordre non amorti

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Déterminer la loi de commande qui permet de placer les pôles du système avec un temps de réponse à 5% T_r= 2sec et un facteur de dépassement $\zeta = 0.707$

L'équation désirée:

$$p^2 + 4p + 8 = 0$$

L'équation du système avec régulateur

$$\det(pI - (A - BK)) = det\left\{\begin{bmatrix} p & p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [K_1 \quad K_2]\right)\right\}$$

$$p^2 + (K_2 + 3)p + 2 - K_1 = 0$$

En égalisant

$$\begin{cases} K_2 + 3 = 4 \\ 2 - K_1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_2 = 1 \\ K_1 = -6 \end{cases}$$

La loi de commande est donnée par

$$u = -Kx = [-6 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Exemple 5

Calculer la commande par retour d'état appliquée au système décrit par les matrices A, B, C, D afin d'obtenir un système ayant les pôles suivants : P= -2,-3, -4

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ -5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

L'équation désirée est: $(p+2)(p+3)(P+4) = p^3 + 9p^2 + 26p + 24 = 0$

On effectue une transformation de modèle en cherchant la matrice de transformation ***T*** formée des vecteurs propres v_1, v_2, v_2 comme décrit plus haut

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -23 \\ -11 \end{bmatrix}$$

D'ou la matrice

$$T = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -23 & 1 & 0 \\ -11 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

On applique la transformation au modèle d'état initial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad \text{vers le modèle d'état final} \quad \begin{aligned} \dot{z} &= A_n + B_n u \\ y &= C_n + D_n u \end{aligned}$$

Puis on calcul les K_z du nouvelle modèle on trouve K_z = [2 41 9]

On calcul les K du modèle initial par K= K_z T^{-1}

K= [9 3.57 -9.28]

5. CONCEPTION DU REGULATEUR PAR RETOUR D'ETAT ET INTEGRATEUR

Afin d'éliminer l'erreur d'un système, on introduit au régulateur par retour d'état un contrôle intégral ceci en ajoutant une variable d'état notée x_i à la sortie de

$$\dot{x}_i = r - Cx$$

Le système d'état augmenté par l'état x_i devient (on prend D=0) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{x}_i &= r - Cx \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Donné sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}$$

On a $u = -Kx + K_e x_i = -\begin{bmatrix} K & K_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}$

En remplace la commande u dans le système d'état

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{x}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(A-BK) & BK_e\\ -C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ x_i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}r$$

$$y=\begin{bmatrix}C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ x_i\end{bmatrix}$$

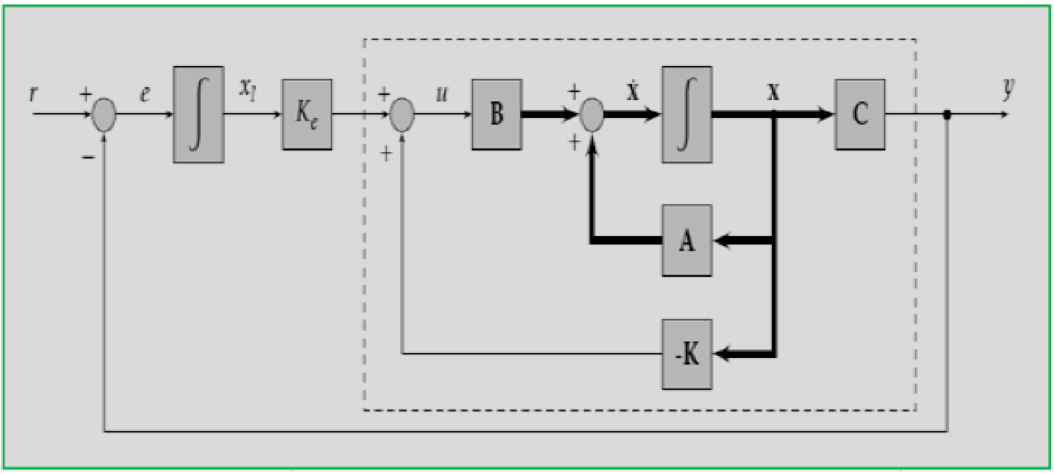

Figure 3: Représentation d'un système

Le système a donc été augmenté pour pouvoir utiliser son équation caractéristique afin de calculer K et K_e, selon la réponse transitoire voulue.

Exemple 7

Soit le système suivant

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

1. Faire la conception d'un obtenir un dépassement de 10% et un temps de stabilisation de 0.5s. Evaluer l'erreur statique due à une entrée échelon unitaire.
2. Répéter le design, cette fois avec du contrôle intégral. Evaluer l'erreur statique due à une entrée échelon unitaire.

L'équation désirée :

$$p^2+16p+183.1=0$$

L'équation du système avec retour d'état

$$p^2+(K_2+5)p+(3+K_1)=0$$

Par égalité on obtient:

K= [180.1 11]

Calcul de l'erreur statique

$$e(\infty) = 1 + C[A - BK]^{-1}B = 1 + [1 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 180.1 & -16 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.995$$

Maintenant le calcul avec l'ajout de l'action intégral et on augmente l'ordre du système avec la variable x_i , ceci donne la nouvelle forme d'état

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[k_1 \quad k_2]\right) & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} k_e \\ -[1 \quad 0] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 - k_1 & -5 - k_2 & k_e \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_i \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique du système avec contrôle intégral est :

$$p^3 + (K_2 + 5)p^2 + (3 + K_1)p + K_e = 0$$

Il faut ajouter un pôle au système contrôle, puisqu'on utilise du contrôle intégral. On le choisit qui est très loin des pôles du système, comme (s + 100). Le polynôme souhait´e est donc :

$$(p = 100)(\, p^2 + 16p + 183.1) = p^3 + 116p^2 + 1783.5p + 18310$$

Ceci donne

$$K_1 = 1780.1 \qquad K_2 = 111 \quad K_3 = 18310$$

Le système final après réglage est donné par:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1783.5 & -116 & 18310 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_i \end{bmatrix}$$

$$e(\infty) = 1 + C(A - BK)^{-1}B$$

$$= 1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1783.5 & -116 & 18310 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$