تمرين:

الجدول التالي يبين دخل 8 اسر (بألاف الدينار) ومقدار ما تنفقه من هذا الدخل (بألاف الدينار)

x	64	68	56	76	64	84	52	64
y	52	50	42	60	52	60	40	52

المطلوب:

1- بافتراض وجود علاقة خطية بين الانفاق y والدخل x، أوجد معادلة خط الانحدار y بدلالة x؟

2- أحسب معامل الارتباط الخطي واختبر معنويته عند مستوى معنوية 5%؟

3- احسب معامل التحديد بطريقتين وفسر معناه؟

4- اختبر عند مستوى دلالة 5% مدى ملائمة النموذج؟

5- اختبر عند مستوى دلالة 5% معنوية أثر الدخل على الانفاق؟

6- اختبر عند مستوى دلالة 5% إمكانية مرور خط الانحدار بالمبدأ؟

7- قدر بفترة ثقة 95% معالم خط الانحدار؟

8- من خلال السؤال السابق استنتج هل يمكن أن ينعدما معاملي خط الانحدار وذلك عند مستوى معنوية 5%؟

9- قدر مستوى إنفاق عائلة دخلها 70000 دينار؟

الإجابة:

1- **أيجاد معادلة خط الانحدار y بدلالة x.**

معادلة خط الانحدار تكتب من الشكل التالي:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$

حيث:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

نحتاج حساب القيم التالية: (x^*y) (y^2) (x^2) وذلك كما في الجدول التالي:

									المجموع
x	64	68	56	76	64	84	52	64	$\sum x$ =528
y	52	50	42	60	52	60	40	52	$\sum y$ =408
x*y	3328	3400	2352	4560	3328	5040	2080	3328	$\sum xy$ =27416
x^2	4096	4624	3136	5776	4096	7056	2704	4096	$\sum x^2$ =35584
y^2	2704	2500	1764	3600	2704	3600	1600	2704	$\sum y^2$ =21176

ومنه:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{8 * 27416 - 528 * 408}{8 * 35584 - 528^2} = \frac{3904}{5888} = 0.663$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{408}{8} = 51 \qquad \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{528}{8} = 66$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 66 - 0.663 * 51 = 7.242$$

ومنه معادلة خط الانحدار تكتب من الشكل التالي:

$$\hat{y}_i = 7.242 + 0.663x_i$$

2- حساب معامل الارتباط الخطي واختبار معنويته عند مستوى معنوية 5%.

أ- حساب معامل الارتباط الخطي.

يعطى معامل الارتباط الخطي بالعلاقة التالية: $r = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{(n\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2)(n\sum {y_i}^2 - (\sum y_i)^2)}}$

ومنه: $r = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{(n\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2)(n\sum {y_i}^2 - (\sum y_i)^2)}} = \frac{3904}{\sqrt{5888 * (8 * 21176 - 408^2)}} = 0.9377$

النتيجة: ان معامل الارتباط (0.9377) يدل على وجود علاقة قوية جدا وطردية بين الدخل والانفاق لان القيمة قريبة من الواحد والاشارة موجب.

ب- اختبار معنويته عند مستوى معنوية 5%.

يتم اختبار معنوية معامل الارتباط الخطي بين الدخل والانفاق من خلال الفرضيتين التاليتين.

$$\begin{cases} \boldsymbol{H_0: \rho = 0} & \text{لا يوجد ارتباط} \\ \boldsymbol{H_1: \rho \neq 0} & \text{يوجد ارتباط} \end{cases}$$

القيمة الحرجة (أو الجدولية) هي: $t\left(1 - \frac{\alpha}{2}; n-2\right) = t\left(1 - \frac{0.05}{2}; 8-2\right) = t(0.975; 6) = 2.45$

قيمة الاختبار هي: $t = \left| r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} \right| = \left| 0.9377\sqrt{\frac{8-2}{1-0.9377^2}} \right| = 6.6108$

نلاحظ أن قيمة الاختبار أكبر من القيمة الحرجة وبالتالي نقبل الفرض البديل $\boldsymbol{H_1}$ **ونفرض الفرض العدمي** $\boldsymbol{H_0}$، أي يوجد ارتباط معنوي بين الدخل والاستهلاك عند مستوى معنوية 5%.

3- حساب معامل التحديد بطريقتين وتفسير معناه.

أ- الطريقة الأولى لحساب معامل التحديد: $R^2 = r^2 = 0.9377^2 = 0.8793$

ب- الطريقة الثانية لحساب معامل التحديد: $R^2 = \frac{SCE}{SCT}$

$$SCT = \sum y^2 - n\bar{y}^2 = 21176 - 8 * 51^2 = 368$$

$$SCE = \hat{\beta}_1^2 * \left(\sum x^2 - n\bar{x}^2\right) = 0.663^2 * (35584 - 8 * 66^2) = 0.633^2 * 736 = 323.5228$$

أما SCR فتحسب بالعلاقة التالية: $SCR = SCT - SCE = 368 - 323.5228 = 44.4772$

ومنه $R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{323.5228}{368} = 0.8791$

تفسير معناه: الدخل يفسر ما نسبته 87.93% من التغيرات الحادثة في الانفاق. أو ما نسبته 87.93% من التغيرات الحادثة في الانفاق مردها للدخل.

4- اختبار عند مستوى دلالة 5% مدى ملائمة النموذج.

من أجل اختبار مدى ملائمة النموذج نضع الفرضيتين التاليتين

$H_0 : \beta_1 = 0$ (النموذج غير ملائم)

$H_1 : \beta_1 \neq 0$ (النموذج ملائم)

حيث:

$$F_C = \frac{SCE}{SCR/_{n-2}} = \frac{323.5228}{44.4772/_{8-2}} = 43.6434$$

$F_C = \frac{R^2}{(1-R^2)/_{n-2}} = \frac{0.8793}{(1-0.8793)/_{8-2}} = 43.71$ أو

أما القيمة المجدولة (أو الحرجة) فهي: $F_t = F(1-\alpha;1;n-2) = F(1-0.05;1;8-2) = F(0.975;1;6) = 8.8113$

نلاحظ أن القيمة المحسوبة أكبر من المجدولة وبالتالي نقبل الفرض البديل ونرفض الفرض العدم؛ أي أن النموذج الخطي ملائم عند مستوى معنوية 5%.

والجدول الموالي يطلق عليه جدول تحليل التباين وهو يفصل الحسابات السابقة:

مصدر الانحراف	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات	FC
الانحدار	SCE=323.5228	1	SCE=323.522	$F_C = \frac{SCE}{SCR/_{n-2}} = \frac{323.522}{7.4129} = 43.64$
البواقي	SCR=44.4772	n-2=6	$\frac{SCR}{n-2} = 7.4129$	
المجموع	SCT=368	n-1=7		

5- اختبار عند مستوى دلالة 5% معنوية أثر الدخل على الانفاق.

لمعرفة وجود أثر للدخل على الانفاق من عدمه نقوم باختبار الفرضيتين التاليتين:

$H_0 : \beta_1 = 0$ (لا يوجد أثر للدخل على الانفاق)

$H_1 : \beta_1 \neq 0$ (يوجد أثر للدخل على الانفاق)

حيث:

$t_c = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$

$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = \hat{\sigma} * \sqrt{\frac{1}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}}$ مع

$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{SCR}{n-2}} = \sqrt{\frac{44.4772}{6}} = 2.7226$ مع

$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = \hat{\sigma} * \sqrt{\frac{1}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}} = 2.7226 * \sqrt{\frac{1}{736}} = 0.1003$ وعليه

$t_c = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} = \frac{0.663}{0.1003} = 6.61$ وعليه

أما القيمة الحرجة (أو الجدولية) هي: $t\left(1-\frac{\alpha}{2};n-2\right) = t\left(1-\frac{0.05}{2};8-2\right) = t(0.975;6) = 2.45$

نلاحظ أن قيمة الاختبار أكبر من القيمة الحرجة وبالتالي نقبل الفرض البديل H_1 ونفرض الفرض العدمي H_0، أي يوجد أثر معنوي للدخل على الانفاق بمستوى معنوية 5%.

6- اختبار عند مستوى دلالة 5% إمكانية مرور خط الانحدار بالمبدأ.

لمعرفة إمكانية مرور خط الانحدار بالمبدأ من عدمه نقوم باختبار الفرضيتين التاليتين:

$H_0 : \beta_0 = 0$ (خط الانحدار يمر بالمبدأ)

$H_1 : \beta_0 \neq 0$ (خط الانحدار لا يمر بالمبدأ)

حيث:

$t_c = \frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}$

$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} = \hat{\sigma} * \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}} = 2.7226 * \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{66^2}{736}} = 6.6171$ مع

$t_c = \frac{\widehat{\beta}_0}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_0}} = \frac{7.242}{6.611} = 1.0954$ وعليه

أما القيمة الحرجة (أو الجدولية) هي: $t\left(1-\frac{\alpha}{2};n-2\right) = t\left(1-\frac{0.05}{2};8-2\right) = t(0.975;6) = 2.45$

نلاحظ أن قيمة الاختبار أصغر من القيمة الحرجة وبالتالي نقبل الفرض العدمي H_0 ونفرض الفرض البديل H_1، أي خط الانحدار يمكن أن يمر بالمبدأ بمستوى معنوية 5%.

7- تقدير بفترة ثقة 95% معالم خط الانحدار.

أ- تقدير بفترة ثقة 95% ميل خط الانحدار (β_1):

تعطى فترة الثقة $(1-\alpha)$ لـ β_1 بالعلاقة التالية: $\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 \mp t\left(1-\frac{\alpha}{2};n-2\right) * \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$

بما أن فترة الثقة المطلوبة هي 95% أي $1-\alpha=0.95$ ومنه $\alpha=0.05$ وعليه:

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 \mp t\left(1-\frac{\alpha}{2};n-2\right) * \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right] \Rightarrow \beta_1 \in [0.663 \mp 2.45 * 0.1003] \Rightarrow \beta_1 \in [0.663 \mp 0.2457] \Rightarrow \beta_1 \in [0.4173 \;\; 0.9087]$$

نحن واثقون بنسبة 95% أن β_1 تنتمي للمجال [0.4173 0.9087].

من خلال المجال نستنتج بأن $\beta_{\&}$ لا يمكن أن تأخذ القيمة 0.

ب- تقدير بفترة ثقة 95% (β_0):

تعطى فترة الثقة $(1-\alpha)$ لـ β_0 بالعلاقة التالية: $\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 \mp t\left(1-\frac{\alpha}{2};n-2\right) * \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right]$

بما أن فترة الثقة المطلوبة هي 95% أي $1-\alpha=0.95$ ومنه $\alpha=0.05$ وعليه:

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 \mp t\left(1-\frac{\alpha}{2};n-2\right) * \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right] \Rightarrow \beta_0 \in [7.242 \mp 2.45 * 6.6171] \Rightarrow \beta_0 \in [7.242 \mp 16.2119\;\;] \Rightarrow \beta_0 \in [-8.97 \;\; 23.4539]$$

نحن واثقون بنسبة 95% أن β_0 تنتمي للمجال [$-8.97 \;\; 23.4539$].

من خلال المجال نستنتج بأن β_0 يمكن أن تأخذ القيمة 0.

9- تقدير مستوى إنفاق عائلة دخلها 70000 دينار.

بما أن النموذج ملائم ويوجد اثر معنوي للدخل فإن تقدير مستوى إنفاق عائلة دخلها 70000 دينار يتم من خلال التعويض في معادلة خط الانحدار المقدرة؛ أي

$\hat{y}_i = 7.242 + 0.663x_i \Rightarrow \hat{y}_i = 7.242 + 0.663(70) = 53.63$ (الف)

نلاحظ بأننا عوضنا بـ 70 لان وحدة القياس هي الالف والنتيجة كانت 53.63 وبما ان وحد قياس الانفاق هي الالف بالتالي فإن قيمة الانفاق لمقدر لأسرة دخلها 70000دج هو 53630 دج.