جامعة محمد خيضر - بسكرة -
كلية العلوم الدقيقة و علوم الطبيعة الحياة
قسم علوم المادة

2020 - 2019
مقياس : ميكانيك الكم

السلسلة الرابعة

التمرين 1

نعتبر موجة مستوية ولندرس حركة جسيم m , حيث تعرف عبارة الكمون(بئر كمون لانهائي) في الفضاء بالصيغة الرياضية التالية :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a \\ \infty & 0 > x > a \end{cases}$$

- احسب الدالة الموجية ؟
- اوجد قيمة الطاقة مكممة ؟
- اوجد طول الموجي لدي بروغلي ؟

التمرين 2

لنعرف حاجز كمون بمايلي :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x > 0 \end{cases}$$

1/ - ادرس الحاجز كلاسيكيا.

2/ - ادرس الحاجز في الميكانيك الكمي.

أ- أكتب وحل معادلة شرود نجر في المنطقتين.
ب- حدد سعة الموجتين النافذة و المنعكسة في الحالتين :
$\mathbf{E_0 < V_0}$ و $E_0 > V_0$

ج- عين احتمال تواجد الجسيم في المنطقة $0 < x$

3/ - قارن نتائج الدراستين الكلاسيكية و الكمومية.

التمرين 3

يقع جسيم كتلته m في حقل كموني بالشكل

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -V_0 & 0 < x < a \\ +\infty & x > a. \end{cases}$$

- ماشرط الحصول على الطيف المستمر ؟ اوجد في هذه الحالة :

1- التوابع الموجية في المناطق المختلفة , واكتب شروط الإستمرار في النقاط الفاصلة بين هذه المناطق .

2- عاملي الإنعكاس والعبور .

- ماشرط الحصول على الطيف المتقطع ؟ اوجد في هذه الحالة :

1- التوابع الموجية في المناطق المختلفة , واكتب شروط الإستمرار في النقاط الفاصلة بين هذه المناطق .
2- المعادلة التي تعطي مستويات الطاقة .
3- ما شرط الحصول على مستوى واحد للطاقة ؟ ثم على مستويين

التمرين 4

احسب عاملي الإنعكاس و العبور عن جدار كموني معطى بالعلاقة التالية :

$$U(x) = \frac{U_0}{1+e^{-x/a}} .$$

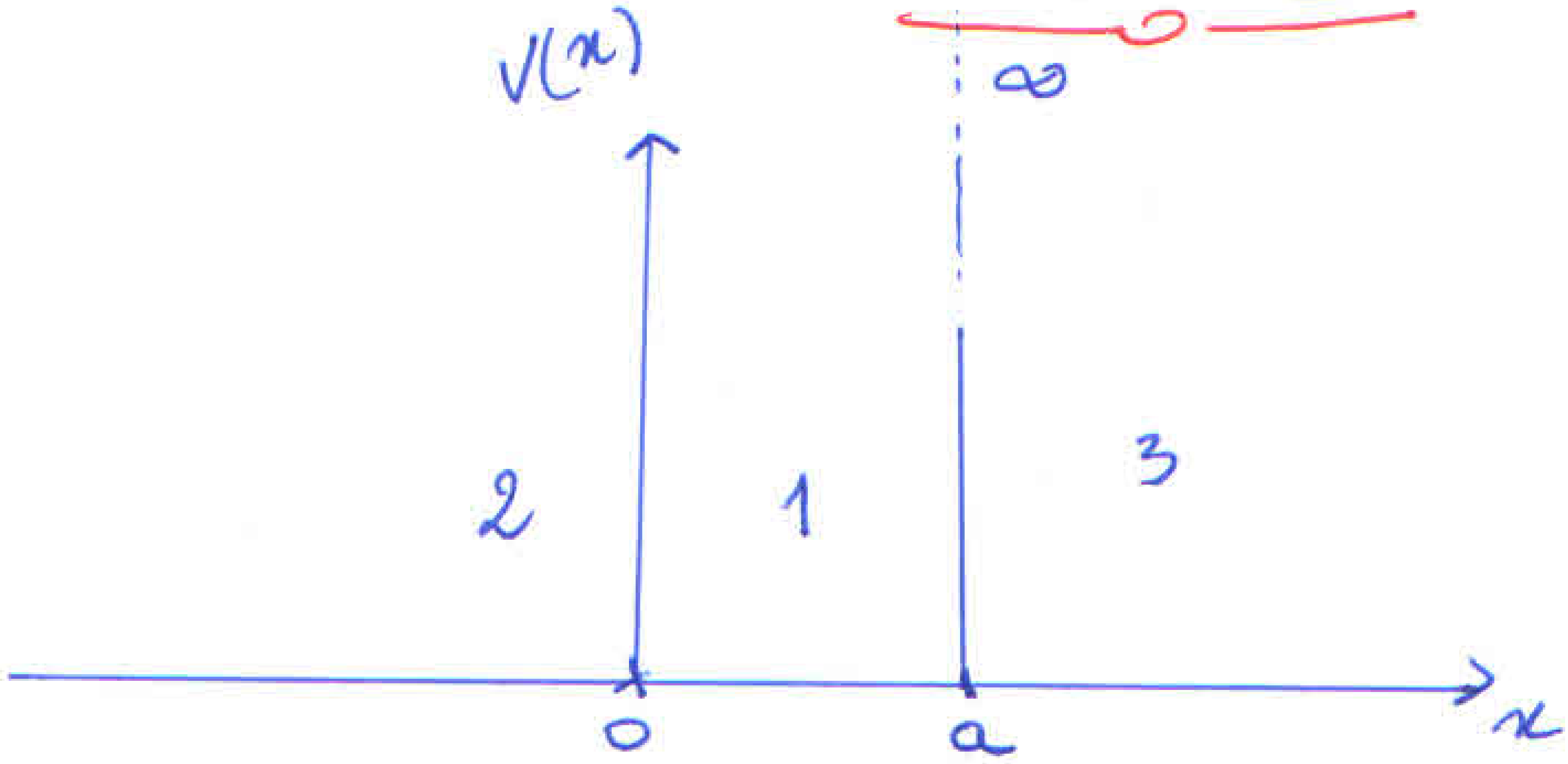
وادرس حالتين خاصتين :

أ- $E \to \infty$

ب- $E \to U_0$

السلسلة 04

التمرين 01



بئر كموني لا نهائي

$$V(x)=\begin{cases}0 & 0\leq x\leq a\\ \infty & 0>x>a\end{cases}$$

① حساب الدالة الموجية :

$0>x>a$

عبارة الدالة الموجية هنا صفرية

$\psi_{2,3}(x)=0.$

لأنه ينعدم تواجد الجسيم في هذه المنطقة .

إذن :

$$\boxed{\psi_{2,3}(x)=0}$$

$0\leq x\leq a$ $\longrightarrow$ $V(x)=0$

معادلة شرودينجر المستقلة عن الزمن :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+k^2\psi=0.$$

$$k^2=\frac{2m}{\hbar^2}$$

حلها هو كالتالي

$\psi_1(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$

لدينا :

أو : $\psi_1(x)=A\sin kx+B\cos kx$

• نعلم من شروط الدالة الموجية أنها مستمرة هذا يعني .

$$\psi_1(0)=\psi_2(0)=0$$

$$A+B=0 \Rightarrow A=-B$$

ومنه نكتب الدالة الموجية

$$\psi_1(x)=Ae^{ikx}-Ae^{-ikx}=A\left(e^{ikx}-e^{-ikx}\right).$$

$$\boxed{\psi_1(x)=Ai2\sin Kx.}$$

أما الشرط الثاني :

$$\psi_1(a)=\psi_3(a)=0$$

$$\Rightarrow \sin Ka=0.$$

$$Ai2\sin Ka=0$$

$$\Rightarrow Ka=n\pi \Rightarrow K=\frac{n\pi}{a}$$

ولدينا :

$$K=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}=\frac{n\pi}{a}$$

• لتحديد قيمة الثابت A نستخدم فكرة إحتمالية تواجد الجسيم :

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi_1|^2dx=1\\ \psi_1(x)=2iA\sin Kx.\end{cases}$$

$$\cancel{\int_{-\infty}^{0}|\psi_2|^2dx}+\int_0^a|\psi_1|^2dx+\cancel{\int_a^{+\infty}|\psi_3|dx}=1$$

$$4A^2\int_0^a\sin^2Kx\,dx=1.$$

$$4A^2\int_0^a\frac{1-\cos(2K)x}{2}dx=4A^2\left[\int_0^a\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}\cos 2Kx\right]$$

$$\Rightarrow 2A^2\left[x\Big|_0^a-\sin 2Kx\Big|_0^a\right]=1$$

$$2A^2\left[a-(\sin 2Ka-0)\right]=1$$

$$2A^2\left(a-\sin 2\frac{n\pi}{\cancel{a}}\cancel{a}\right)=1$$

$$2A^2a=1\Rightarrow A=\sqrt{1/2a}$$

2

ومنه:
$$\psi_1(x) = 2i \frac{1}{\sqrt{2a}} \sin \frac{n\pi}{a} x$$

+ إيجاد قيمة الطاقة الكمومية.

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{n^2\pi^2}{a^2}$$

إيجاد طول الموجة لدى بروغلي:

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p}.$$

$$E = p^2/2m \Rightarrow p = \sqrt{2mE}$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{2m}\hbar^2}{\cancel{2m}} \frac{n^2\pi^2}{a^2}}$$

$$p = \sqrt{\frac{\hbar^2\pi^2}{a^2}}\, n$$

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{h}{\dfrac{\hbar \pi n}{a}} = \dfrac{2a}{n\pi} \\ h = 2\pi\hbar \end{cases}$$

ملاحظة

$E > V_0$

1- إذا كانت $V_0 = 0$ ← طاقتها تساوي الشكل:

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}$$

2- إذا كانت V_0 ← طاقتها تساوي الشكل:

$$\psi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + \underbrace{B_2 e^{-ik_2 x}}_{=0}$$

$A_2 e^{ik_2 x}$ ← موجة عابرة

$B_2 e^{-ik_2 x}$ ← موجة منعكسة $= 0$

يتحرك الجسيم من اليسار إلى اليمين

$$\Rightarrow \psi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x}.$$

$E < V_0$

1- إذا كانت $V_0 = 0$ ← طاقتها تساوي الحل ①:

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}.$$

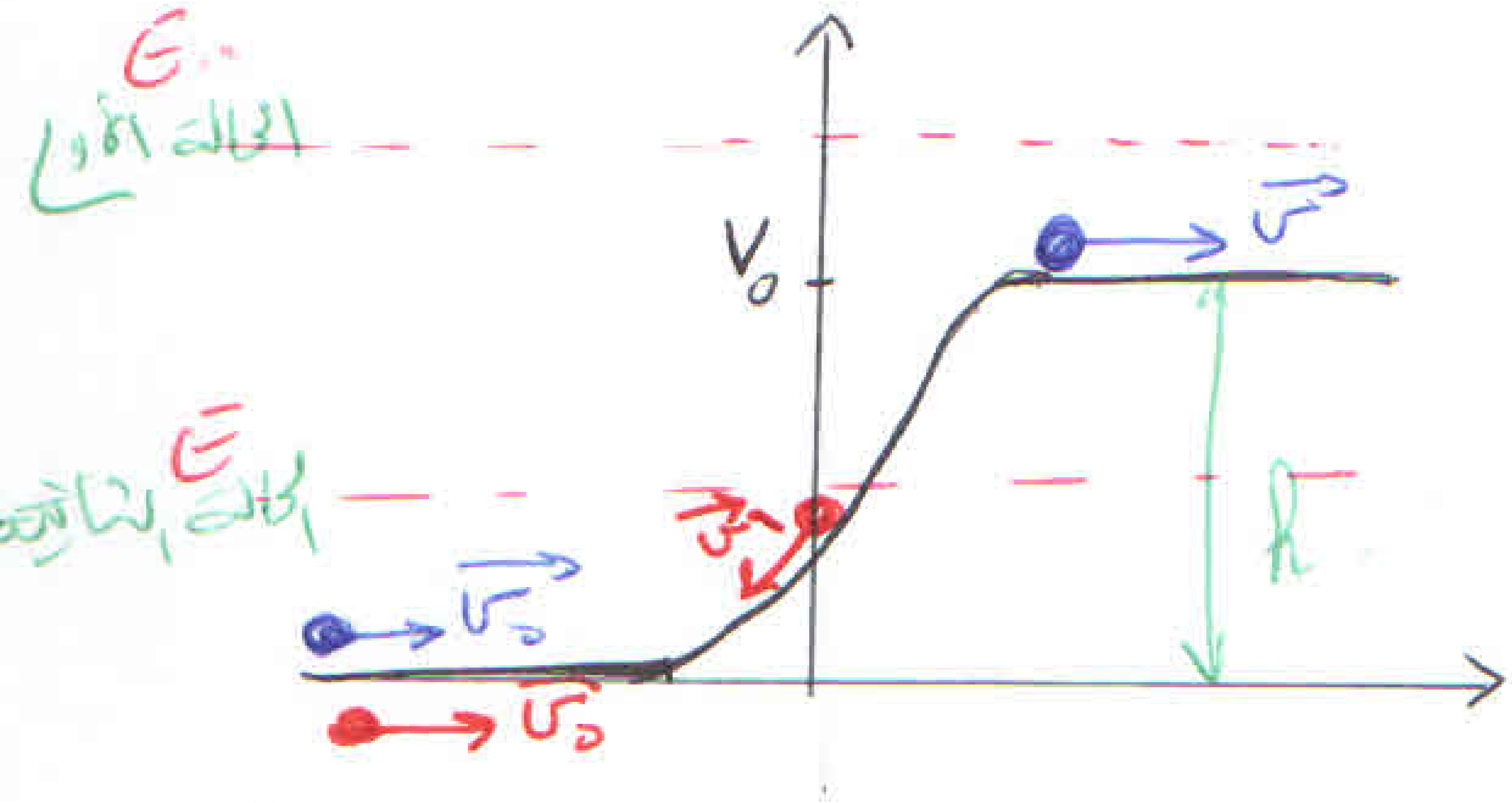
2- إذا كانت V_0 ← طاقتها تساوي الشكل:

$$\psi_2(x) = A_2 e^{\rho x} + B_2 e^{-\rho x}$$

$$x > 0 \longrightarrow \psi_2(x) = B_2 e^{-\rho x}$$

$$x < 0 \longrightarrow \psi_2(x) = A_2 e^{\rho x}.$$

تمثيل لنا هيئة الكلاسيكي:



الحالة الأولى $E > V_0$

لدينا..
$$\begin{cases} E - V_0 = \frac{1}{2} m v^2 \\ E = \frac{1}{2} m v_0^2 \end{cases}$$
يتحرك الجسيم: ⟵

• نجد أن $v < v_0$: أي أن كل الجسيمات تعبر الحاجز

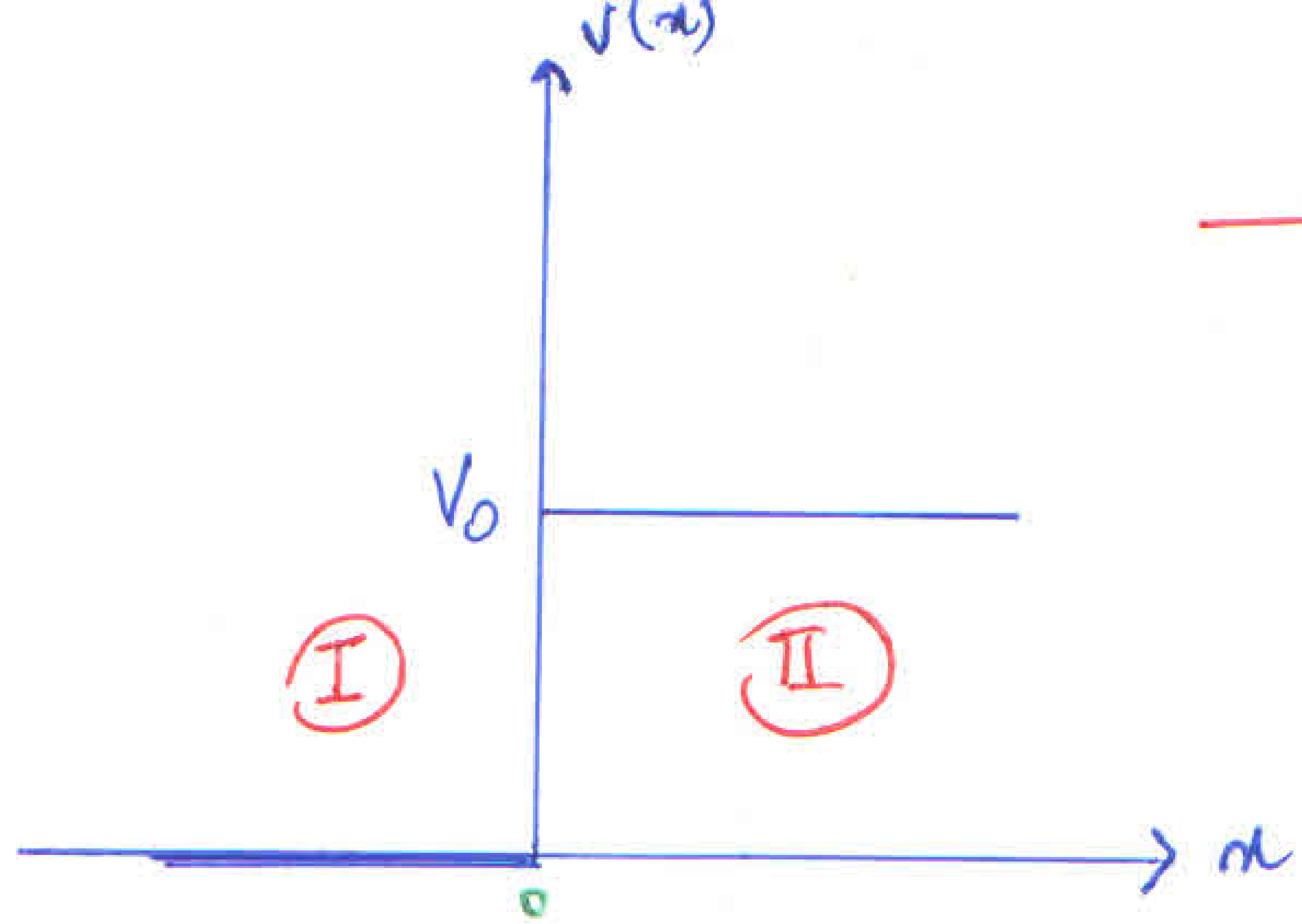
والكمون كلاسيكيا $V(x) = mgz$.

أي: $\Rightarrow V_0 = mgh$.

الحالة الثانية $E < V_0$

طاقة الجسيمات أقل من ارتفاع الحاجز ويظهر ارتداد كلي الجسيمات

التمرين ② :



حاجز كمون

$$V(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ V_0 & x>0\end{cases}$$

الدراسة في الميكانيك الكمي :

Ⓐ . كتابة وحل معادلة شرودينجر للمنطقتين :

الحالة $E>V_0$

المنطقة ① : $x<0$, $V(x)=0$

$$H\psi=E\psi.$$

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+0\right)\psi_I(x)=E\,\psi_I(x).$$

$$\Rightarrow\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\right)\psi_I(x)=0\Rightarrow\left(\frac{d^2}{dx^2}+k^2\right)\psi_I(x)=0$$

وحلها الرياضي :

$$\psi_I(x)=A\,e^{ikx}+B\,e^{-ikx}.$$

$$k=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}$$

المنطقة (II) $V(x)=V_0\,,\quad x>0$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V_0\right)\psi_{II}(x)=E\,\psi_{II}(x).$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+(E-V_0)\frac{2m}{\hbar^2}\right)\psi_{II}(x)=0.$$

حلها العام الرياضي:

$$\psi_{II}(x)=C\,e^{ik'x}+D\,e^{-ik'x}.$$

أي: $k'^2=\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0).$

• في المنطقة (II) لا توجد موجة منعكسة أي آتية من اللانهاية وعليه: $D=0$

$$\Rightarrow \psi_{II}(x)=C\,e^{ik'x}$$

الحالة الثانية: $E<V_0.$

المنطقة (I): $V=0\,,\quad x<0$

معادلة شرودنجر:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+k_0^2\right)\psi_I(x)=0$$

حلها هو نفس الحل. لأن k لم يتغير أي $k^2=\frac{2m}{\hbar^2}E$

المنطقة (II): $V(x)=V_0\,,\quad x>0$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\right)\psi_{II}(x)=0.$$

حلها العام من الشكل:

$$\psi_{II}(x)=C\,e^{\rho x}+D\,e^{-\rho x}.$$

$$(ik')^2 = \rho^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$$

حيث $\psi_{II}(x)$ موجيا يجب أن يكون منتهيا في اللانهائية

أي

لأن $x>0$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \psi_{II}(x) = 0 \\ \Rightarrow C = 0. \end{cases}$

ومنه :- $\psi_{II}(x) = D e^{-\rho x}$

ب - تحديد سعة الموجتين :

الحالة $E > V_0$

$\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$

شروط الاستمرارية

$$\frac{d\psi_I(0)}{dx} = \frac{d\psi_{II}(0)}{dx}$$

ومنه

$$\begin{cases} A + B = C \\ \cancel{i}k(A - B) = \cancel{i}k'C. \end{cases}$$

السؤال قال الموجة النافذة $\overset{\text{عابرة}}{=}$ والمنعكسة .

لتبسيط نضع $A = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + B = C \\ k(1 - B) = k'C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = C - 1 \\ k(1 - (C - 1)) = k'C \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 - C = \frac{k'}{k}C \Rightarrow C = \frac{2k}{k' + k} \quad / \quad B = \frac{2k}{k' + k} - 1$$

$$B = \frac{-k' + k}{k' + k}$$

$$\psi_I(x) = 1 * e^{ikx} + \frac{k - k'}{k' + k} e^{-ikx}$$

$$\psi_{II}(x) = \frac{2k}{k' + k} e^{ik'x}.$$

8

الحالة $E < V_0$

$$\begin{cases} \psi_I(0) = \psi_{II}(0) \\ \dfrac{d\psi_I(0)}{dx} = \dfrac{d\psi_{II}(0)}{dx} \end{cases}$$ شروط الاستمرارية

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = D \\ ik(A - B) = -D\rho \end{cases}$$

ونضع : $A = 1$

$$\begin{cases} 1 + B = D & \Rightarrow B = D - 1 \\ ik(1 - B) = -D\rho & \Rightarrow ik\big(1 - (D-1)\big) = -D\rho \end{cases}$$

$$\Rightarrow ik(2 - D) = -D\rho$$

$$\Rightarrow i2k = -D\rho + ikD$$

$$\Rightarrow D(ik - \rho) = i2k$$

$$\Rightarrow D = \frac{2ik}{ik - \rho}$$

$$B = \frac{2ik}{ik - \rho} - 1$$

$$= \frac{2ik - ik + \rho}{ik - \rho} \Rightarrow B = \frac{ik + \rho}{ik - \rho}$$

$$\psi_I(x) = 1\, e^{ikx} + \frac{ik + \rho}{ik - \rho} e^{-ikx}$$

$$\psi_{II}(x) = \frac{2ik}{ik - \rho} e^{-\rho x}$$

ج - عين احتمال تواجد الجسيم في المنطقة $x>0$ ، $E<V_0$

احتمال تواجد الجسيم هو $|\psi|^2$.

$$|\psi_{II}|^2 = \psi_{II}^*(x)\,\psi_{II}(x) = D^* e^{-\rho x} \cdot D\, e^{-\rho x}$$

$$= \left(\frac{2ik}{ik-\rho}\right)^* \cdot \left(\frac{2ik}{ik-\rho}\right) e^{-2\rho x}$$

$$= \frac{-4k^2}{(ik)^2-\rho^2}\, e^{-2\rho x}$$

$$= \frac{4k^2}{k^2+\rho^2}\, e^{-2\rho x}$$

$$= \frac{4k^2}{k^2+\rho^2}\, e^{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)}\,x}$$

ولدينا في الحركة الحرة . $|\psi|^2 = 1$

المقارنة نتائج الدراستين الكلاسيكية والكمومية.

الحالة $E > V_0$

كلاسيكيا: كل الجسيمات تعبر الحاجز بينما كموميا (كمي) هناك احتمال غير معدوم لانعكاس الجسيمات.

الحالة $E < V_0$

كلاسيكيا: كل الجسيمات ترتد عند الحاجز مباشرة وكموميا هناك احتمال نفوذ إلى المنطقة II غير معدوم

التمرين (04)

حساب عامل الانعكاس والعبور

$$U(x) = \frac{U_0}{1 + e^{-x/a}}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{U_0}{1 + e^{-x/a}}\right)\psi(x) = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$E \longrightarrow +\infty$ (P)

البحث لهذه المعادلة عندما $x \to \pm\infty$

$\boxed{x \to -\infty}$.

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi(x) = 0$$

ومنه

$$\begin{cases} \psi_{-\infty}(x) = A_1 e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x} \\ k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E \end{cases}$$

الحل عبارة عن مجموع موجتين: الأول ساقطة و الثانية منعكسة

$\boxed{x \to +\infty}$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi(x) = 0$$

• عدم وجود موجة منعكسة (من اليسار إلى اليمين)

$$\psi_{+\infty}(x) = A_1 e^{ik_2x} + \cancel{B_2 e^{-ik_2x}} \rightarrow 0$$

موجة منعكسة

$$\begin{cases} \psi_{+\infty} = A_2 e^{ik_2 x} \\ k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0) \end{cases}$$

$E > U_0$

بالإنتقال إلى متحول جديد

$$Z = -e^{-x/a}.$$

نخرج المعادلة :

$$Z^2 \frac{d^2\psi}{dZ^2} + Z\frac{d\psi}{dZ} + \frac{2m}{\hbar^2}a^2\left(E - \frac{U_0}{1-Z}\right)\psi(Z) = 0.$$

حل المعادلة كالتالي :

$$\psi(Z) = e^{ik_2 a} W(Z)$$