ملخص المحاضرة "الثالثة"

1. تحقيق التوافق بين الطريقة العادية وطريقة المصفوفات في إيجاد المعادلات الطبيعية لطريقة المربعات الصغرى

لدينا :
$$\hat{B} = (X'X)^{-1} \cdot X'Y$$

هذه النتيجة تعد اساسية لتقديرات المربعات الصغرى

و توضيحا لهذه النتيجة نعتبر حالة المتغيرين الاثنين (حالة الانحدار الخطي البسيط) أي :

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix}$$

ومنه
$$X'X\hat{B} = X'Y$$

لدينا
$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix}$$

ومنه
$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X \\ \sum X & \sum X^2 \end{bmatrix}$$

ولدينا
$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum XY \end{bmatrix}$$

ومنه

$$X'X\hat{B} = X'Y$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \end{bmatrix}$$

ومنه نجد

$$n\hat{a} + \hat{b}\sum x = \sum y$$
$$\hat{a}\sum x + \hat{b}\sum x^2 = \sum xy$$

وهي تمثل معادلات المربعات الصغرى في الانحدار الخطي البسيط التي درسناها سابقا

لنعتبر الآن حالة ثلاثة متغيرات $(k=3)$ أي حالة الانحدار الخطي المتعدد.

لدينا :

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} \\ 1 & X_{22} & X_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} \end{bmatrix}$$

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ X_{31} & X_{32} & \cdots & X_{3n} \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ X_{31} & X_{32} & \cdots & X_{3n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} \\ 1 & X_{22} & X_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_2 & \sum X_3 \\ \sum X_2 & \sum X_2^2 & \sum X_2X_3 \\ \sum X_3 & \sum X_3X_2 & \sum X_3^2 \end{bmatrix}$$

$$X'y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_{21} & X_{22} & & X_{2n} \\ X_{31} & X_{32} & \cdots & X_{3n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum X_2 Y \\ \sum X_3 Y \end{bmatrix}$$

ومنه :

$$\begin{bmatrix} n & \sum X_2 & \sum X_3 \\ \sum X_2 & \sum X_2^2 & \sum X_2 X_3 \\ \sum X_3 & \sum X_3 X_2 & \sum X_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum X_2 Y \\ \sum X_3 Y \end{bmatrix}$$

ومنه

$$\sum Y = n\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum X_2 + \hat{\beta}_3 \sum X_3$$

$$\sum X_2 Y = \hat{\beta}_1 \sum X_2 + \hat{\beta}_2 \sum X_2^2 + \hat{\beta}_3 \sum X_2 X_3$$

$$\sum X_3 Y = \hat{\beta}_1 \sum X_3 + \hat{\beta}_2 \sum X_2 X_3 + \hat{\beta}_3 \sum X_3^2$$

وهي المعادلات الطبيعية الثلاثة لطريقة المربعات الصغرى .

وبنفس الطريقة يمكن ان نتحصل على المعادلات الطبيعية الثلاثة في حالة الانحرافات كما سبق وأن بيننا في حالة الانحدار الخطي البسيط

2. مثال عددي : لدينا المعطيات التالية

Y :	4	4	8	12	12	: $\sum Y = 40$
X_2 :	1	3	4	6	6	: $\sum X_2 = 20$
X_3 :	6	6	7	7	9	: $\sum X_3 = 35$

المطلوب تقدير معالم هذا النموذج بطريقة المربعات الصغرى

الحل :

لدينا $\hat{B} = (X'X)^{-1} \cdot X'y$

لدينا:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}$$

ومنه منقول المصفوفة X:

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 7 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

جداء المصفوفة X' بـ X:

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 7 & 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 20 & 35 \\ 20 & 98 & 148 \\ 35 & 148 & 251 \end{bmatrix}$$

جداء المصفوفة X' بـ y:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 7 & 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 192 \\ 296 \end{bmatrix}$$

لدينا:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{|X'X|} \cdot Com(X'X)'$$

حيث $|X'X|$ محدد المصفوفة $X'X$.

$$|X'X| = 5\begin{vmatrix} 98 & 148 \\ 148 & 251 \end{vmatrix} - 20\begin{vmatrix} 20 & 148 \\ 35 & 251 \end{vmatrix} + 35\begin{vmatrix} 20 & 98 \\ 35 & 148 \end{vmatrix}$$

$$= 220$$

5/

اما $com(X'X)'$ فنتحصل كما يلي

$$Com(X'X) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 98 & 148 \\ 148 & 251 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 20 & 148 \\ 35 & 251 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 20 & 98 \\ 35 & 148 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 20 & 35 \\ 148 & 251 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 35 \\ 35 & 251 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 35 & 148 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 20 & 35 \\ 98 & 148 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 35 \\ 20 & 148 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 20 & 98 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

ومنه

$$Com(X'X) = \begin{bmatrix} 2694 & 160 & -470 \\ 160 & 30 & -40 \\ -470 & -40 & 90 \end{bmatrix}$$

لدينا :

$$\hat{B} = (X'X)^{-1}.X'Y = \frac{1}{|X'X|}.Com(X'X)'.X'Y$$

ومنه

$$\hat{B} = \frac{1}{220}.\begin{bmatrix} 2694 & 160 & -470 \\ 160 & 30 & -40 \\ -470 & -40 & 90 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 40 \\ 192 \\ 296 \end{bmatrix}$$

ومنه

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 2{,}91 \\ 1{,}455 \\ 0{,}727 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}91 \\ 1{,}455 \\ 0{,}727 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= 2{,}91 \\ \hat{\beta}_2 &= 1{,}455 \\ \hat{\beta}_3 &= 0{,}727 \end{aligned}$$

ومنه

$$\hat{Y} = -2,91 + 1,455X_2 + 0,727X_3$$

3. خصائص مقدرات المربعات الصغرى في ظل الانحدار الخطي المتعدد

- خاصية عدم التحيز

$$E(\hat{B}) = B$$

أي

$$E(\hat{B}) = \begin{bmatrix} E(\hat{\beta}_1) \\ E(\hat{\beta}_2) \\ \vdots \\ E(\hat{\beta}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = B$$

خاصية أقل تباين

لدينا

$$Var(\hat{B}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1}$$

وإذا افترضنا أن الشعاع $\hat{B}$ هو تقدير للطرق تقدير أخرى

فإنه

$$Var(\hat{B}) - Var(\hat{B}) = \sigma_u^2 CC' \geq 0$$

حيث C هو مصفوفة ثوابت و C' هو منقولها.